

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

EDUARDO COSTA BRAGA

**ANÁLISE DE CIRCUITOS
MAGNÉTICOS LINEARES E NÃO
LINEARES**

Porto Alegre

2017

EDUARDO COSTA BRAGA

**ANÁLISE DE CIRCUITOS
MAGNÉTICOS LINEARES E NÃO
LINEARES**

Monografia apresentada para a disciplina ELE218-
Análise de Sistemas Magnéticos A, oferecida pelo
PPGEE, da UFRGS, como parte dos requisitos
para a aprovação final do semestre.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ály Ferreira Flores Filho

Porto Alegre

2017

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo explorar o conceito de circuitos magnéticos lineares e não-lineares, através de abordagens conceituais de abstrações, simplificações, modelagens algébricas e métodos gráficos, denotando sua importância assim como vantagens e desvantagens na resolução de problemas que envolvam dispositivos eletromagnéticos. Sendo para isto realizado uma breve revisão bibliográfica dos conceitos básicos de eletromagnetismo e materiais magnéticos, de modo a servir de referencial teórico para o objeto em estudo.

Palavras-chave: Circuitos Magnéticos, Materiais Magnéticos, Campo Magnético, Linearidade, Não-Linearidade.

ABSTRACT

The present work aims to explore the concept of linear and nonlinear magnetic circuits, through conceptual approaches of abstractions, simplifications, algebraic modeling and graphic methods, denoting their importance as well as advantages and disadvantages in solving problems involving electromagnetic devices. For this purpose, a brief bibliographical review of the basic concepts of electromagnetism and magnetic materials is carried out, in order to serve the theoretical reference for the object being studied.

Keywords: Magnetic Circuits, Magnetic Materials, Magnetic Field, Linearity, Non-Linearity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Fluxo de dispersão em um entreferro.	13
Figura 2:	Fluxo concatenado em um solenoide.	13
Figura 3:	Indutância mútua.	14
Figura 4:	Distribuição espacial de densidade de fluxo magnético obtida por elementos finitos.	15
Figura 5:	(a) Momento orbital do elétron. (b) Momento de spin do elétron.	16
Figura 6:	Magnetização em função do campo aplicado para um material diamagnético.	18
Figura 7:	(a) Magnetização em função do campo aplicado para um material paramagnético em diferentes temperaturas. (b) Susceptibilidade em função da temperatura, conforme lei de Curie.	19
Figura 8:	Comparação entre diamagnetismo e paramagnetismo em um gráfico de indução (B) em função da intensidade do campo magnético (H).	19
Figura 9:	(a) Os momentos líquidos nas duas sub-redes antiparalelas são diferentes em magnitude, dando origem a um momento magnético espontâneo abaixo de T_c . (b) Magnetização de um material ferrimagnético em função da temperatura.	20
Figura 10:	(a) Magnetização de um material ferromagnético em função da temperatura (b) Orientação aleatória dos momentos magnéticos acima da temperatura de Curie. (c) Orientação paralela dos momentos magnéticos abaixo da temperatura de Curie.	21
Figura 11:	Arranjo esquemático dos domínios magnéticos com $M = 0$	21
Figura 12:	Movimento dos domínios magnéticos em uma parede de Bloch.	22
Figura 13:	Movimento dos domínios magnéticos em um laço de histerese.	22
Figura 14:	Ciclo de histerese genérico para um material ferromagnético.	23
Figura 15:	Ciclo de histerese genérico materiais magneticamente moles e duros.	24
Figura 16:	(a) Circuito magnético de um motor CC. (b) Simplificação da análise do circuito magnético.	26
Figura 17:	Analogia entre: (a) Um circuito elétrico, (b) Um circuito Magnético.	27
Figura 18:	Relutância - Componente do circuito magnético.	28

Figura 19:	Linearidade e Não-Linearidade: (a) Circuitos elétricos. (b) Circuitos magnéticos.	30
Figura 20:	Estrutura magnética composta por núcleo de material magnético linear. . .	31
Figura 21:	Estrutura magnética composta por núcleo de material magnético não-linear.	32
Figura 22:	Estrutura magnética de núcleo ferromagnético laminado.	34
Figura 23:	Circuito magnético equivalente.	35
Figura 24:	Sobreposição dos gráficos $\Phi \times F$: material ferromagnético e espaço livre. .	36
Figura 25:	Sobreposição da curva $B_m \times H_m$ do material ferromagnético em $\Phi_g \times F_g$ invertido.	36
Figura 26:	Valores numéricos da reta de carga.	37
Figura 27:	Curva $B_m \times H_m$ do material ferromagnético laminado.	37
Figura 28:	Modelo de rede de relutância tridimensional em um transformador de potência trifásico.	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Lei de Hopkinson	29
Tabela 2:	Analogia entre grandezas de circuitos elétricos e magnéticos.	29
Tabela 3:	Leis de Kirchhoff	30

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	CAMPO MAGNÉTICO	9
2.1	Produção de Campo Magnético	9
2.2	Análise de Campo Magnético	11
2.3	Fluxo Disperso, Concatenado e Indutância	12
2.4	Distribuição Espacial de Densidade de Fluxo Magnético	15
3	MATERIAIS MAGNÉTICOS	16
3.1	Materiais Magnéticos Lineares	17
3.2	Materiais Magnéticos Não Lineares	20
4	CIRCUITOS MAGNÉTICOS	25
4.1	Simplificação da Análise	25
4.2	Analogia entre Circuitos Elétricos e Magnéticos	27
4.3	Linearidade e Não-Linearidade	30
4.4	Reta de Carga	34
4.5	Parâmetros Concentrados	38
4.6	Método de Redes de Relutância	39
5	CONCLUSÃO	41
	REFERÊNCIAS	42
	ANEXO A CURVAS DE MAGNETIZAÇÃO DE MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS	44

1 INTRODUÇÃO

A utilização de campos eletromagnéticos é trivial em engenharia para o desenvolvimento de dispositivos, tais como motores e transformadores. A necessidade em realizar cálculos de intensidade de campo magnético (H) e densidade de fluxo magnético (B) se torna complexa, uma vez que tais dispositivos possuem uma distribuição de campo tridimensional.

Estes problemas estão sujeitos às leis do eletromagnetismo de Maxwell, sendo que envolvem grandezas vetoriais que devem ser resolvidas em cada ponto do domínio do problema. E por este, geralmente, possuir geometrias irregulares e complexas, a resolução analítica das equações integro-diferenciais nem sempre é possível.

Considerando que H e B são funções do espaço e do tempo, determinados por parâmetros como a geometria dos condutores e as propriedades e estruturas magnéticas dos materiais, geralmente não lineares que compõem os dispositivos magnéticos, a análise destes compreende problemas lineares e não-lineares.

Suposições de simplificação adequadas tornam possíveis, em muitos casos, a redução do problema envolvendo campos eletromagnéticos a um simples conceito de circuito. O problema tridimensional geral pode ser reduzido com boa aproximação para análise a um problema unidimensional. Esta redução resulta em uma simplificação muito útil, através da qual o campo tridimensional torna-se um circuito unidimensional, denominado circuito magnético.

Em geral, um circuito magnético consiste em toda a maior parte do seu comprimento de material de fluxo magnético de alta permeabilidade com uma seção transversal substancialmente uniforme na qual o fluxo magnético é largamente confinado. Assim, a análise por circuitos magnéticos remodela o problema, simplificando a geometria e se utilizando de grandezas escalares.

No Capítulo 2 são abordados os princípios básicos que envolvem a geração e análise de um campo magnético, relacionado à resolução de circuitos magnéticos. O Capítulo 3 apresenta as características e propriedades dos materiais magnéticos lineares e não lineares. E por último, o Capítulo 4 introduz o conceito de circuitos magnéticos lineares e não lineares.

2 CAMPO MAGNÉTICO

O campo magnético é o mecanismo fundamental pelo qual a energia é convertida de uma forma para outra em dispositivos eletromagnéticos, como motores, geradores e transformadores (CHAPMAN, 2012).

Segundo JILES (1991), um campo magnético pode ser concebido como a variação de energia em um volume de espaço, sendo que há um gradiente desta energia tal que é produzida uma força que pode ser percebida pela aceleração de uma carga elétrica movendo-se através deste campo por, um condutor de corrente elétrica, o torque em um dipolo magnético, ou mesmo por, uma reorientação de spins em elétrons de certos tipos de átomos.

2.1 Produção de Campo Magnético

Um campo magnético é produzido sempre que há carga elétrica em movimento, como uma corrente elétrica que flui em um condutor, ou devido ao movimento orbital e de spin dos elétrons dentro de um material, que formam correntes internas ao material, conhecidas como *correntes amperianas*, como é o caso dos ímãs permanentes, sendo que o campo magnético exerce uma força em ambos os casos (JILES, 1991).

Considerando que o campo magnético é formado unicamente pela distribuição linear da corrente elétrica que o produz, independente do meio material, pode-se definir a grandeza intensidade de campo magnético como sendo a quantidade de corrente elétrica (Ampères) por unidade de comprimento linear (metros), intitulado de H . Esta intensidade de campo magnético, gerada por uma corrente elétrica que flui em um condutor, pode ser calculada através da lei de Biot-Savart, ou de forma equivalente através da lei de Ampère, conforme Equação 1 (HAYT, 2008).

$$\oint_C H dl = I \quad (1)$$

Então ao gerar um campo magnético, por uma corrente elétrica I , conforme lei de Ampère, com intensidade H em um material qualquer, este irá responder a esta intensidade de campo aplicado através da grandeza densidade de fluxo magnético B . A relação entre a densidade

de fluxo magnético e a intensidade de campo magnético é uma propriedade conhecida como permeabilidade (μ). No espaço livre, B é considerado uma função linear de H através da relação,

$$B = \mu_0 H \quad (2)$$

Onde μ_0 é a permeabilidade do espaço livre, uma constante universal, com valor $4\pi 10^{-7} H/m$. Porém para a maioria dos materiais magnéticos utilizados em engenharia a permeabilidade não é constante, sendo então a relação entre B e H não linear,

$$B = (\mu_0 \mu_r) H = \mu H \quad (3)$$

Uma vez que, μ_r é a permeabilidade relativa, medida adimensional dependente do material, que expressa intrinsecamente a capacidade que o material tem de ser mais ou menos suscetível à passagem de fluxo magnético (BASTOS, 1989).

Assim, considerando a área de uma superfície qualquer, com uma permeabilidade relativa característica e que é submetida a um campo magnético externo H , está sujeita à passagem de um fluxo magnético, proporcional ao número de linhas de campo, sendo sua unidade de medida o Weber (Wb). O Weber é definido como a quantidade de fluxo magnético, em uma espira condutora atravessada pelo fluxo, e que produz nesta uma força eletromotriz de um volt, quando o fluxo é reduzido a zero a uma taxa uniforme em um segundo (NIST, 2008).

Desta forma fica evidente que a variação do fluxo magnético que atravessa um material gera uma tensão induzida neste, conforme a Lei de Faraday-Lenz,

$$fem = -N \frac{d\phi}{dt} = \oint_C E dl = -\frac{d}{dt} \oint_S B da \quad (4)$$

Onde ϕ denota o fluxo magnético (Webers), N o número de espiras condutoras atravessadas pelo fluxo, t o tempo (segundos), E é a intensidade de campo elétrico (Newton/Coulomb) ao longo de um contorno fechado de comprimento l (em metros), B a densidade de fluxo magnético (Teslas) e fem a força eletromotriz induzida (Volts).

Assim, é possível relacionar quatro princípios básicos que descrevem como os campos magnéticos são produzidos para serem utilizados em circuitos magnéticos, tais como solenóides.

des, transformadores, motores e geradores: (CHAPMAN, 2012):

1. Um fio condutor de corrente produz um campo magnético em sua vizinhança.
2. Um campo magnético variável no tempo induzirá uma tensão em uma bobina se esse campo passar através dessa bobina.
3. Um fio condutor de corrente, na presença de um campo magnético, tem uma força induzida nele.
4. Um fio movendo-se na presença de um campo magnético tem uma tensão induzida nele.

Porém, para se analisar os circuitos magnéticos é necessário que se faça uma análise do campo eletromagnético e uma simplificação do mesmo, através de relações derivadas das equações de Maxwell.

2.2 Análise de Campo Magnético

Quando as correntes e fluxos variam com o tempo, bem como as três coordenadas do espaço, o problema é do tipo mais geral e sua solução pode ser extremamente difícil. De modo a simplificar o problema e as condições de operação, as correntes e os fluxos são concebidas como variando lentamente, em um estado quase estacionário ou, em alguns casos, estacionário (M.I.T, 1965).

As equações de Maxwell, na forma simplificada, sem variação no tempo, e excluindo-se a lei de Gauss para campos eletrostáticos, que não é aplicada à este trabalho, pois, trata-se de uma abordagem magnetostática do problema, é composto pelas seguintes equações (BASTOS, 1989):

$$\oint_C H dl = I \quad (5)$$

$$\oint_S B da = 0 \quad (6)$$

$$\oint_C E dl = 0 \quad (7)$$

Como não há formação de campo elétrico pela variação da densidade de fluxo magnético, então a Equação 7 não será utilizada nos domínios dos problemas em estudo neste trabalho.

A Equação 6, conhecida como lei de Gauss para o magnetismo, denota o fluxo magnético

como sendo conservativo,

$$\oint_S B da = \phi \quad (8)$$

Ou seja, o fluxo total que sai de uma superfície é igual ao fluxo que entra nesta superfície. Pode-se então comparar a lei de Gauss para o magnetismo com a lei de Kirchhoff das correntes, sendo utilizada como ferramenta para análise de circuitos magnéticos (OPENCOURSEWARE, 2010).

A lei de Ampère, conforme Equação 5, afirma que a integral de linha da componente tangencial da intensidade de campo magnético H ao longo de um contorno fechado C é igual à corrente total que passa através de qualquer superfície S delimitada por este contorno. Geralmente a corrente elétrica, em circuitos magnéticos, é conduzida através de condutores enrolados em espiras, de modo a formar bobinas, a Equação 5 pode ser reescrita como (OPENCOURSEWARE, 2010),

$$\oint_C H dl = NI = fmm \quad (9)$$

Onde N denota o número de espiras da bobina e fmm é a força magnetomotriz, em ampères-espiras, análoga à força eletromotriz (fem) em circuitos elétricos, sendo possível de forma análoga utilizar a lei de Kirchhoff das tensões.

Desta forma tem-se os dois principais conceitos, fluxo magnético (ϕ) e força magnetomotriz (fmm), utilizados na análise de circuitos magnéticos e obtidos a partir das equações de Maxwell, aplicadas ao campo da magnetostática.

2.3 Fluxo Disperso, Concatenado e Indutância

Devido aos materiais magnéticos possuírem diferentes permeabilidades e que em muitos casos não são constantes, o fluxo magnético que atravessa esses materiais assume uma distribuição não uniforme (BASTOS, 1989; M.I.T, 1965).

O caso mais trivial de dispersão de fluxo magnético ocorre em circuitos com entreferros, como ilustra Figura 1. Um dos efeitos desta dispersão de fluxo, também chamado de *campo de espraiamento*, é a de aumentar a área efetiva da seção reta no entreferro, de forma que isto deve ser considerado nos cálculos do circuito magnético (FITZGERALD, 2003).

O fluxo em uma solenoide de N espiras percorrido por uma corrente I é ϕ , conforme ilustra

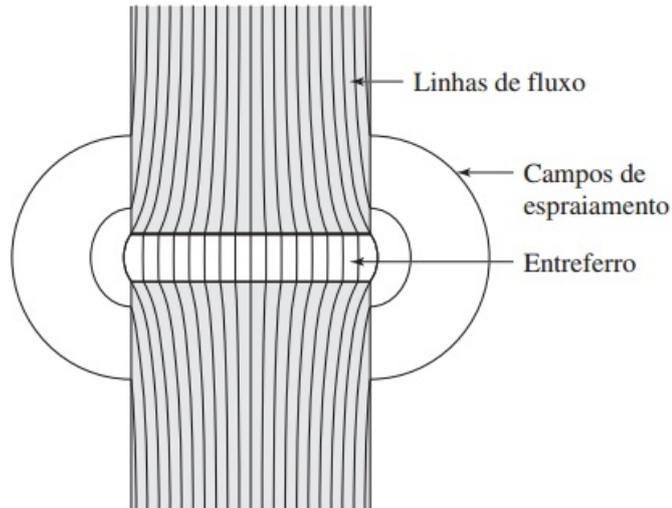


Figura 1: Fluxo de dispersão em um entreferro.
Fonte: FITZGERALD, 2003.

Figura 2.

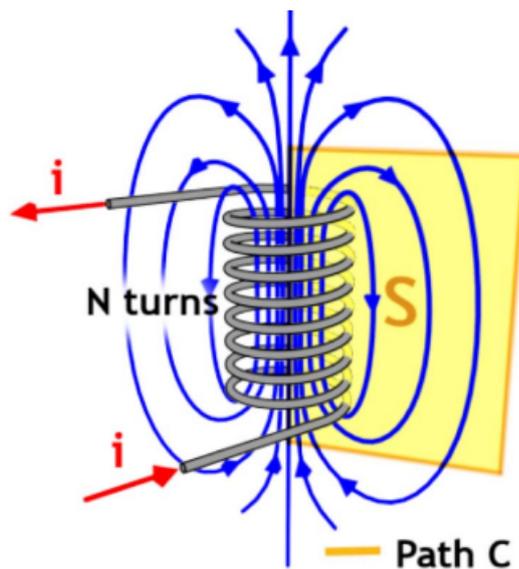


Figura 2: Fluxo concatenado em um solenoide.
Fonte: OPENCOURSEWARE, 2010.

Considerando que o fluxo ϕ envolve cada uma das N espiras, e também que cada uma das N espiras envolve o fluxo total ϕ . O fluxo concatenado λ é definido como (HAYT, 2008),

$$\lambda = N\phi = NBA = \mu_0 \frac{N^2 I}{l} A \quad (10)$$

Onde, B é a densidade de fluxo magnético, A é a área de seção transversal do solenoide, μ_0 a permeabilidade do vácuo, I a corrente que percorre o solenoide e l o comprimento total

do solenóide. Em bobinas que possuem uma espira única, o fluxo concatenado é igual ao fluxo total (FITZGERALD, 2003; HAYT, 2008; BASTOS, 1989). Se o meio em que o solenoide está é linear, o fluxo concatenado λ é proporcional à corrente I que o gerou,

$$\lambda \propto I \quad (11)$$

Então, através de uma constante de proporcionalidade, L , denominada indutância do circuito, tem-se,

$$L = \frac{\lambda}{I} \quad (12)$$

A indutância L é uma propriedade que é função da geometria do circuito. A unidade de indutância é o Henry (H), que é equivalente à webers-espira/ampère. A indutância ilustrada na Figura 2 é trivialmente referida como *auto-indutância*, ou seja, se refere ao fluxo concatenado gerado pelo próprio indutor (FITZGERALD, 2003; HAYT, 2008; BASTOS, 1989).

Porém, se duas bobinas compartilharem o mesmo núcleo de material ferromagnético, supondo este sem perdas e não saturável, conforme ilustra Figura 3, e considerando que as correntes i_1 e i_2 sejam variáveis no tempo, mas com uma frequência suficientemente baixa tal que possam ser desprezadas quaisquer perdas, há um fluxo concatenado λ_1 na bobina de N_1 espiras, sendo que parte deste fluxo concatena com a bobina de N_2 espiras.

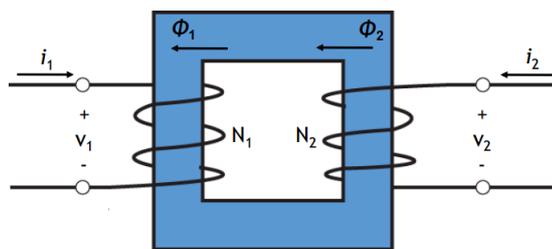


Figura 3: Indutância mútua.

Fonte: Adaptado de OPENCOURSEWARE, 2010.

Assim existe uma *indutância mútua*, que relaciona o fluxo concatenado de N_1 em N_2 , denominado de λ_{12} , com a corrente i_1 (PYRHONEN, 2008; BASTOS, 1989),

$$L_{mutua} = \frac{\lambda_{12}}{i_1} \quad (13)$$

De forma análoga existe uma *indutância mútua* que relaciona o fluxo concatenado λ_{21} com a corrente i_2 . É interessante observar que além da *indutância mútua* gerada através dos fluxos

concatenados entre as bobinas, uma *auto-indutância* é gerada em cada uma delas devido aos seus próprios fluxos concatenados (PYRHONEN, 2008; BASTOS, 1989).

Para os casos mais triviais em engenharia, em que há saturação do material ferromagnético, a proporcionalidade linear entre o fluxo concatenado e a corrente não existe, sendo que as definições de indutâncias são as mesmas, porém neste caso estas são funções das correntes elétricas das bobinas (BASTOS, 1989).

2.4 Distribuição Espacial de Densidade de Fluxo Magnético

No projeto de dispositivos eletromagnéticos é trivial a análise da distribuição espacial de densidade de fluxo magnético, uma vez que esta proporciona avaliar o comportamento do material magnético, a intensidade de fluxo em uma determinada área da geometria do dispositivo, o fluxo concatenado, e de um modo geral a performance do dispositivo em análise (FERNANDES, 2011).

No entanto a utilização de métodos analíticos para mapear esta distribuição em materiais magnéticos não lineares anisotrópicos é complexa, uma alternativa é a utilização de métodos numéricos, e.g. elementos finitos, conforme ilustra Figura 4.

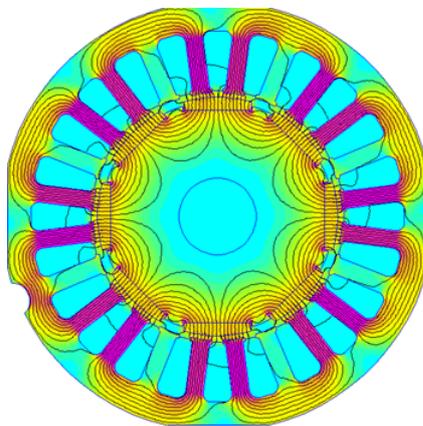


Figura 4: Distribuição espacial de densidade de fluxo magnético obtida por elementos finitos.

Fonte: Autor, 2017.

Sendo que a modelagem da geometria e dos parâmetros eletromagnéticos do dispositivo a ser inserido no software de elementos finitos é simplificada, através do conceito de circuito magnético.

3 MATERIAIS MAGNÉTICOS

As propriedades magnéticas dos materiais possuem origem na estrutura eletrônica dos átomos. Do ponto de vista clássico, o magnetismo dos materiais está associado a dois movimentos dos elétrons que explicam a origem dos momentos de dipolo magnéticos: o momento de dipolo angular orbital do elétron e o momento de dipolo angular do spin do elétron, conforme ilustra Figuras 5(a) e 5(b), respectivamente (JILES, 1991; KRISHNAN, 2016).

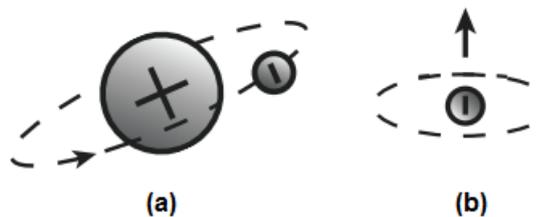


Figura 5: (a) Momento orbital do elétron. (b) Momento de spin do elétron.
Fonte: Adaptado de OPENCOURSEWARE, 2010.

Ao se descrever materiais magnéticos é comum definir a contribuição efetiva de todos os momentos de dipolo magnéticos médios de um determinado volume. Essa quantidade conhecida como a magnetização \vec{M} do material, é o módulo da soma vetorial dos momentos de dipolo magnéticos individuais, sendo portanto uma quantidade vetorial que representa a magnetização do material e é representada por (KRISHNAN, 2016; OPENCOURSEWARE, 2010),

$$\vec{M} = N\vec{m} \quad (14)$$

Onde, \vec{M} é o vetor magnetização do material (A/m), N é o número de dipolos por unidade de volume (N/m^3) e \vec{m} é o momento de dipolo magnético médio (Am^2).

Quando um material é colocado em um campo magnético externo H , os momentos magnéticos atômicos individuais no material contribuem para a sua resposta ao campo de magnetização \vec{M} , considerando a relação entre estes linear, existe uma constante de proporcionalidade denominada susceptibilidade magnética χ , tal que (JILES, 1991; KRISHNAN, 2016),

$$M = \chi H \quad (15)$$

A susceptibilidade magnética indica a sensibilidade de um material a um campo magnético

aplicado. Assim, existe uma relação direta entre a susceptibilidade magnética e permeabilidade relativa (SPALDIN, 2010),

$$\mu_r = \chi + 1 \quad (16)$$

A partir das Equações 2, 15 e 16, podemos relacionar B , H , M e μ (KRISHNAN, 2016),

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0H + \mu_0\chi H = \mu_0(1 + \chi)H = \mu_0\mu_r H = \mu H \quad (17)$$

No espaço livre a densidade de fluxo magnético está diretamente relacionada com o campo externo aplicado através da permeabilidade do vácuo, porém no interior de um material magnético esta relação não é diretamente a mesma, devido a suas propriedades como magnetização e susceptibilidade magnética ou permeabilidade magnética relativa (KRISHNAN, 2016).

Sabendo que o campo magnético externo \vec{H} tende a alinhar os momentos magnéticos dipolares (tanto induzidos como permanentes) dentro do material, de forma que o material fique magnetizado, quando o vetor magnetização \vec{M} estiver na mesma direção de \vec{H} o material é do tipo paramagnético ou ferromagnético, quando os vetores apontarem para direções opostas o material é do tipo diamagnético (JILES, 1991; KRISHNAN, 2016; SPALDIN, 2010).

Diferentemente dos materiais ferromagnéticos os paramagnéticos e diamagnéticos, na maioria das situações, possuem uma magnetização proporcional ao campo magnético externo aplicado. Ou seja, a resposta dos materiais diamagnéticos e paramagnéticos em relação ao campo externo aplicado é linear, enquanto que os materiais ferromagnéticos possuem resposta não linear (SHAKELFORD, 2008).

3.1 Materiais Magnéticos Lineares

Um material magnético linear pode ser definido como aquele cuja magnetização responde linearmente ao campo magnético externo aplicado, ou seja, quanto maior a intensidade da densidade linear de corrente elétrica maior a magnetização e vice-versa (SHAKELFORD, 2008; KRISHNAN, 2016; SPALDIN, 2010).

Dentre a classificação dos materiais magnéticos, em termos de propriedades magnéticas, os que apresentam uma resposta linear em relação ao campo magnético externo aplicado são os diamagnéticos, paramagnéticos e os antiferromagnéticos. Sendo que, alguns paramagnéticos apresentam uma susceptibilidade magnética dependente da temperatura e sob a presença de um campo magnético externo muito intenso podem saturar, porém excetuando estas condições apre-

sentam comportamento linear. Os materiais antiferromagnéticos apresentam comportamento similar aos paramagnéticos (JILES, 1991; KRISHNAN, 2016; SPALDIN, 2010).

Os materiais diamagnéticos são aqueles que não possuem dipolos magnéticos permanentes, devido aos seus átomos ou íons possuírem camadas eletrônicas completas. Assim todos os materiais que possuem elétrons ocupando órbitas definidas são diamagnéticos. Ao se aplicar um campo magnético externo em um material diamagnético o elétron permanece na mesma órbita, porém sua velocidade é alterada de modo que é induzido um momento de dipolo magnético oposto ao campo. Esta repulsão é bastante fraca e a susceptibilidade magnética é negativa, conforme ilustra Figura 6 (JILES, 1991; KRISHNAN, 2016).

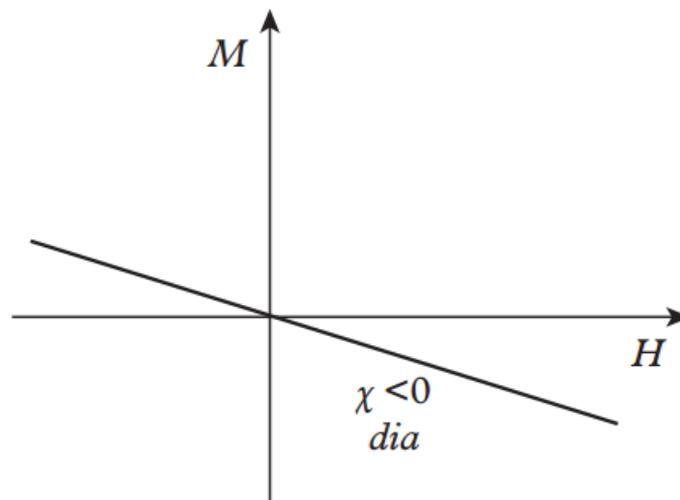


Figura 6: Magnetização em função do campo aplicado para um material diamagnético.
Fonte: KRISHNAN, 2016.

Os materiais paramagnéticos possuem momento magnético atômico permanente e não integrante, e uma orientação espacial destes distribuída de forma aleatória. Conforme se aplica um campo magnético externo, os momentos de dipolo magnético tendem a se alinhar gerando uma magnetização fraca de atração, logo a susceptibilidade magnética é positiva. Esta magnetização é diretamente proporcional ao campo aplicado, até o ponto de saturação, e inversamente proporcional a temperatura. A relação entre a susceptibilidade magnética e a temperatura é dada pela lei de Curie para o paramagnetismo (JILES, 1991; KRISHNAN, 2016; SPALDIN, 2010),

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (18)$$

Onde, χ é a susceptibilidade magnética, C é a uma constante positiva específica do material chamada de constante de Curie ($KA m^2/Tmol$) e T é a temperatura absoluta (K). As Figuras

7(a) e 7(b) ilustram o efeito da temperatura nos paramagnéticos.

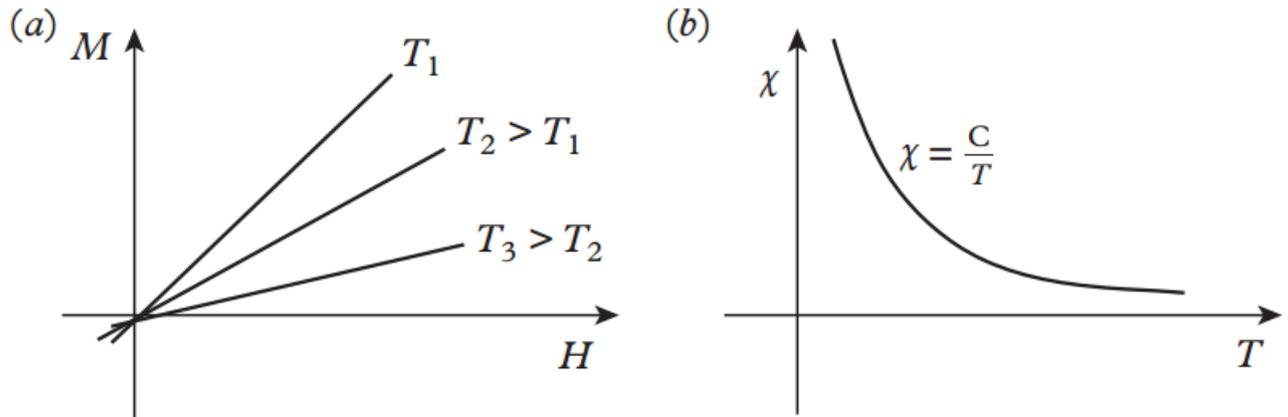


Figura 7: (a) Magnetização em função do campo aplicado para um material paramagnético em diferentes temperaturas. (b) Susceptibilidade em função da temperatura, conforme lei de Curie.

Fonte: Adaptado de KRISHNAN, 2016.

Desta forma, se verifica que tanto diamagnéticos como paramagnéticos respondem ao campo magnético externo aplicado com uma indução linear, porém de baixa intensidade, conforme ilustra Figura 8.

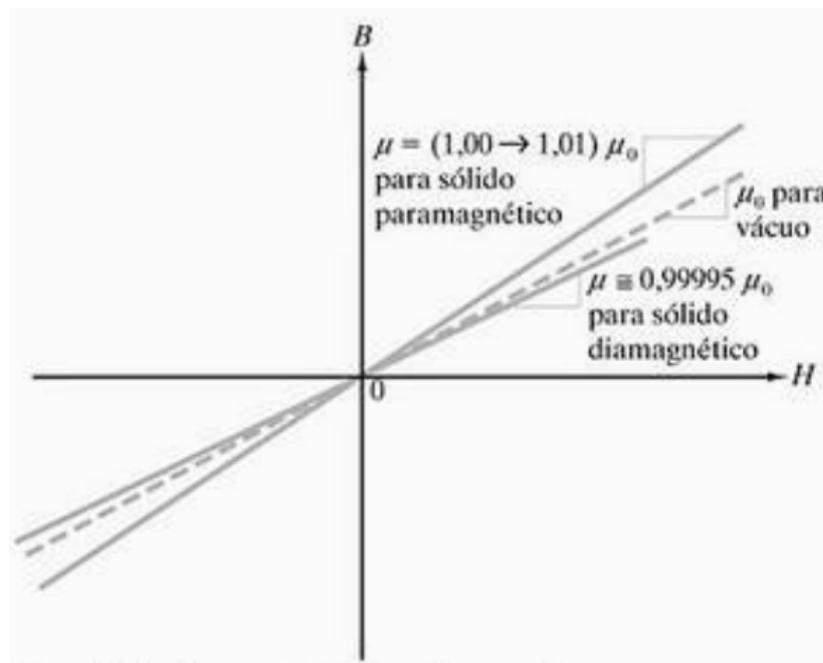


Figura 8: Comparação entre diamagnetismo e paramagnetismo em um gráfico de indução (B) em função da intensidade do campo magnético (H).

Fonte: SHAKELFORD, 2008.

Devido a baixa indução, estes fenômenos não possuem importância prática em engenharia.

3.2 Materiais Magnéticos Não Lineares

Os materiais magnéticos não lineares compreendem os ferrimagnéticos e os ferromagnéticos (OPENCOURSEWARE, 2010).

Os ferrimagnéticos são microscopicamente semelhante aos antiferromagnéticos, porém, seus momentos de dipolo magnético são distribuídos em duas sub-redes com alinhamento antiparalelo e magnitudes diferentes, conforme Figura 9(a), resultando em uma magnetização espontânea abaixo da temperatura de Curie, conforme gráfico da Figura 9(b) (KRISHNAN, 2016; SPALDIN, 2010).

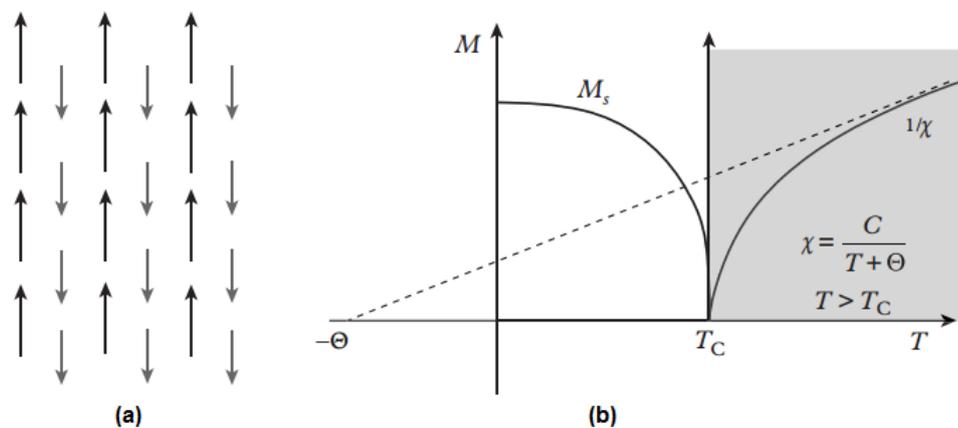


Figura 9: (a) Os momentos líquidos nas duas sub-redes antiparalelas são diferentes em magnitude, dando origem a um momento magnético espontâneo abaixo de T_c . (b) Magnetização de um material ferrimagnético em função da temperatura.

Fonte: Adaptado de KRISHNAN, 2016.

Desta forma, estes se comportam macroscopicamente como os ferromagnéticos, com uma grande susceptibilidade magnética positiva e histerese magnética. Geralmente é observado em materiais com duas ou mais espécies magnéticas ocupando posições em diferentes sub-redes e possuindo diferentes momentos magnéticos, tipicamente óxidos sinterizados como o ferrite. Os ferrites possuem aplicações em altas frequências, devido a seu alto valor de resistividade elétrica reduzem perdas por correntes de Foucault (SPALDIN, 2010; SHAKELFORD, 2008).

Os materiais ferromagnéticos possuem vasta aplicação prática em engenharia, e costumam ser empregados em dispositivos que trabalham em baixas frequências, e.g. 60Hz. Estes materiais possuem dependência em relação a temperatura, e exibem um comportamento paramagnético acima da temperatura de Curie, conforme ilustram Figuras 10(a) e 10(b) (KRISHNAN, 2016; SHAKELFORD, 2008).

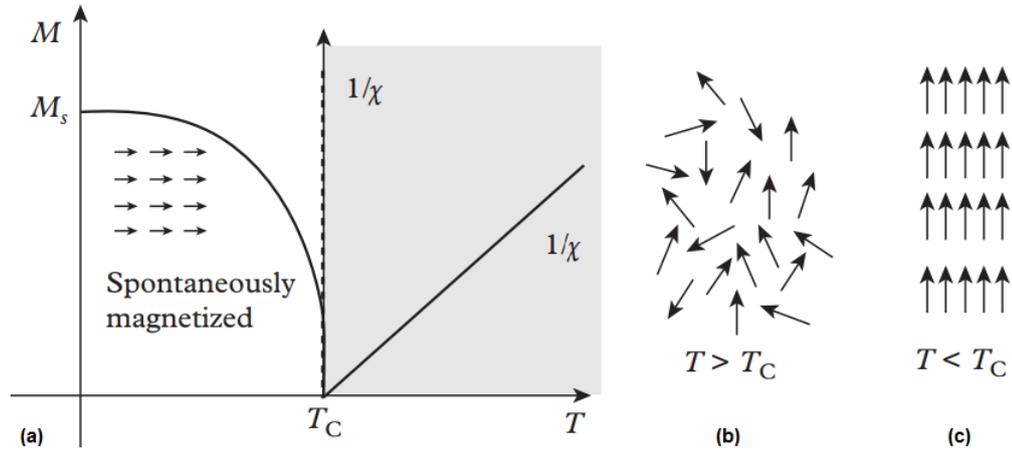


Figura 10: (a) Magnetização de um material ferromagnético em função da temperatura (b) Orientação aleatória dos momentos magnéticos acima da temperatura de Curie. (c) Orientação paralela dos momentos magnéticos abaixo da temperatura de Curie.

Fonte: Adaptado de KRISHNAN, 2016.

Nos ferromagnéticos os momentos se alinham paralelamente e possuem forte interação entre si, conforme ilustra Figura 10(c), de modo que cada dipolo magnético atômico sofre a ação de um campo magnético médio criado pelos vizinhos, isto tende a fazer com que vizinhos muito próximos formem um domínio de momentos magnéticos na mesma direção. Este campo efetivo, é chamado campo molecular de Weiss e é proporcional à magnetização local do domínio (KRISHNAN, 2016; SHAKELFORD, 2008; SPALDIN, 2010).

Assim, existem momentos magnéticos alinhados espontaneamente em regiões de magnetização uniforme denominadas de domínios, conforme ilustra Figura 11, e orientados de tal forma que a magnetização líquida total do material desmagnetizado (sem a presença de um campo magnético externo) seja zero, pois este estado minimiza a energia magnetostática total do material (SPALDIN, 2010; JILES, 1991).

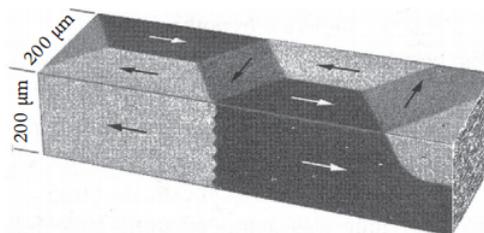


Figura 11: Arranjo esquemático dos domínios magnéticos com $M = 0$.

Fonte: Adaptado de KRISHNAN, 2016.

A resposta de tais materiais a um campo externo é não linear e exibe histerese com o comportamento detalhado dependente de uma variedade de características microestruturais ou extrínsecas. A susceptibilidade, geralmente, possui valores elevados e é histerética porque o processo de magnetização prossegue através do movimento da parede do domínio (SHAKELFORD, 2008; SPALDIN, 2010).

Durante o crescimento do domínio magnético, sua parede, denominada de parede de Bloch, se desloca em direção favorável ao domínio mais próximo que possua uma orientação similar ao campo aplicado. Desta forma uma parede de Bloch pode ser entendida como uma região estreita, onde a orientação dos momentos atômicos muda sistematicamente em 180° ou 90° , conforme ilustra Figura 12 (SHAKELFORD, 2008; SPALDIN, 2010).

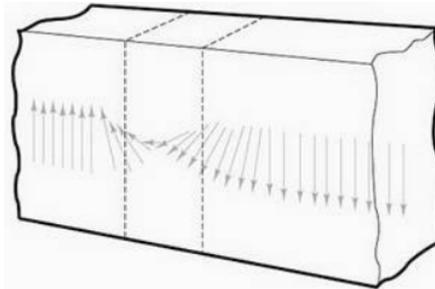


Figura 12: Movimento dos domínios magnéticos em uma parede de Bloch.

Fonte: SHAKELFORD, 2008.

A Figura 13 ilustra um laço de histerese e o comportamento dos domínios magnéticos de acordo com a orientação do campo aplicado.

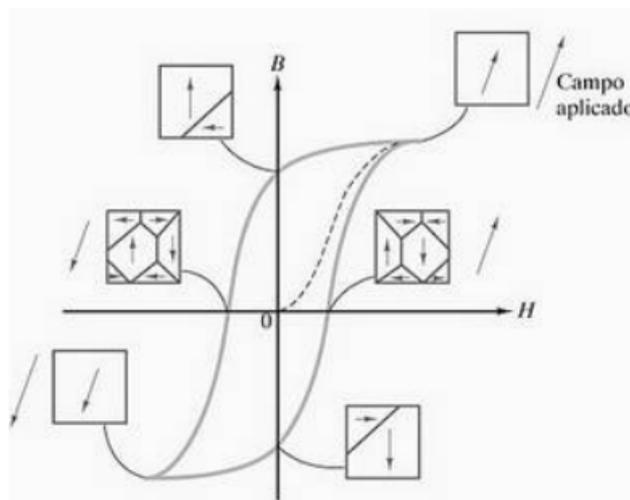


Figura 13: Movimento dos domínios magnéticos em um laço de histerese.

Fonte: SHAKELFORD, 2008.

Quando um material ferromagnético é submetido a uma magnetização alternada há uma perda de energia que se transforma em calor e que é, por unidade de volume, proporcional à área do ciclo de histerese. Esta energia "perdida" é a responsável pela movimentação das paredes de Bloch e a rotação dos domínios magnéticos (SHAKELFORD, 2008; KRISHNAN, 2016).

Um laço de histerese genérico, com os principais pontos de operação, para um material ferromagnético é ilustrado na Figura 14. É interessante notar que durante a magnetização inicial a indução alcança um elevado valor e dependendo do campo aplicado está permanece no material, isto contrasta com a Figura 8, sendo este um comparativo que justifica sua utilização em aplicações de engenharia.

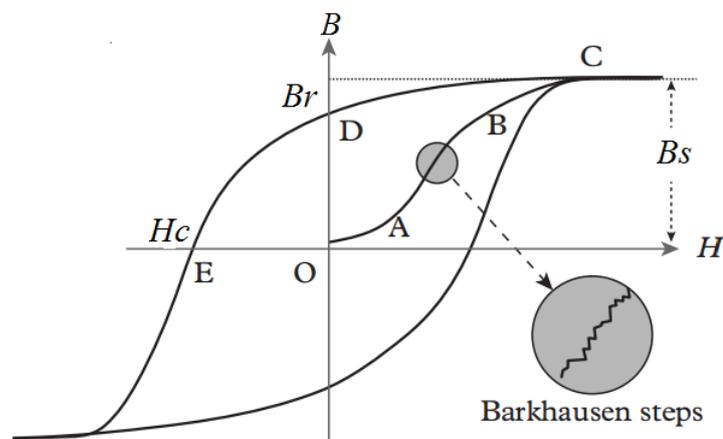


Figura 14: Ciclo de histerese genérico para um material ferromagnético.

Fonte: Adaptado de KRISHNAN, 2016.

Inicialmente a magnetização do trecho OA é reversível. No trecho AB ocorre um movimento significativo das paredes de Bloch, de modo que nesta região a magnetização é irreversível. O detalhe entre o trecho AB enfatiza o efeito Barkhausen, que evidencia um movimento não suave das paredes de Bloch devido a variação irregular da posição, causando uma mudança descontínua da magnetização do material (SHAKELFORD, 2008; KRISHNAN, 2016; SPALDIN, 2010).

Em BC todos os domínios magnéticos se alinham ao longo da direção do campo aplicado (H), levando a uma indução de saturação (B_s). Nesta região o aumento do campo magnético aplicado (H) não causa aumento na indução do material (B), porém ao se reduzir gradualmente o campo aplicado a zero, conforme trecho CD, a indução não será reduzida a zero, sendo está a indução remanente (B_r) do material (SHAKELFORD, 2008; KRISHNAN, 2016; SPALDIN, 2010)..

Ao se inverter o sentido do campo aplicado (H) e aumentar gradualmente a sua intensidade, conforme trecho DE, a indução do material (B) é levada a zero, ou seja, o material é desmagnetizado. Este ponto de desmagnetização é chamado de coercitividade intrínseca do material (H_c). Percebe-se que tanto magnetização quanto indução variam, em um material ferromagnético, com o campo aplicado e conseqüentemente a susceptibilidade e permeabilidade não são constantes (SHAKELFORD, 2008; KRISHNAN, 2016; SPALDIN, 2010).

Os materiais magnéticos não lineares que possuem maiores aplicações em dispositivos eletromagnéticos e em engenharia podem ser classificados de acordo com algumas características como, coercitividade intrínseca, permeabilidade e área do laço de histerese. Estes materiais são conhecidos como: magneticamente moles e magneticamente duros (ALY, 2005). A Figura 15 ilustra os laços de histerese destes materiais.

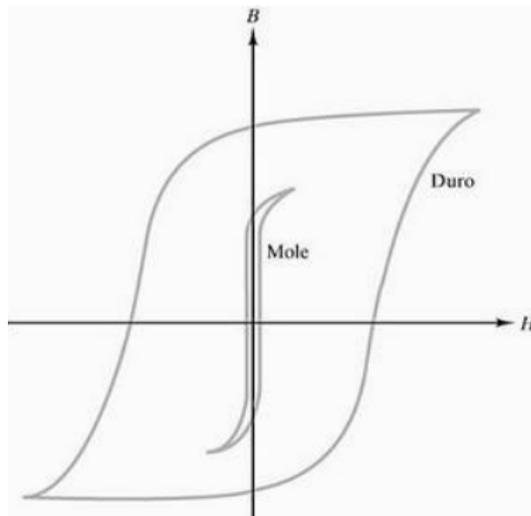


Figura 15: Ciclo de histerese genérico materiais magneticamente moles e duros.

Fonte: SHAKELFORD, 2008.

Como se observa na Figura 15, materiais magnéticos moles apresentam uma coercitividade intrínseca pequena, normalmente menor que 1kA/m, e uma alta permeabilidade magnética aliada a uma baixa perda por histerese, isso faz com que estes sejam excelentes "condutores" de fluxo magnético, e.g. aço silício. Em contrapartida os magneticamente duros possuem uma alta coercitividade intrínseca, com valores acima de 10kA/m, e uma baixa permeabilidade magnética, porém são utilizados como fonte de fluxo magnético e excitação, e.g. ímãs permanentes (ALY, 2005).

4 CIRCUITOS MAGNÉTICOS

O cálculo da intensidade de campo H e da densidade de fluxo B , em um dispositivo eletromagnético, se faz necessário para a solução de muitos problemas em engenharia. Como, geralmente, H e B são funções do espaço e tempo, sendo determinados pelas, geometrias dos materiais envolvidos, valores de correntes, frequências e produtos energéticos de ímãs permanentes, é possível, em muitos casos, através de pressupostos simplificadores adequados, a redução do problema para um método mais simples envolvendo o conceito de circuito (M.I.T, 1965).

Os circuitos magnéticos são formados pelos componentes dos dispositivos eletromagnéticos, que empregam o fluxo magnético para induzir tensão ou para produzir força. Esses dispositivos incluem transformadores, motores, geradores, alto-falantes, solenoides entre outros atuadores.

Em tais dispositivos é necessário produzir e conduzir o fluxo magnético pelos seus componentes. Isso geralmente é obtido com a utilização de material ferromagnético, pois estes possuem permeabilidade relativa muito maior que a do ar. Isto pode ser comparado a um condutor de cobre, onde sua alta condutividade elétrica facilita a condução da corrente.

Então existe uma analogia entre circuitos elétricos e magnéticos, relacionando diversos aspectos, como lei de Hopkinson (análogo a lei de Ohm), relutância (análogo a resistência elétrica), lei de Kirchhoff, linearidade e não linearidade dos componentes e modelagem a parâmetros concentrados (SCHMIDT, 2011; M.I.T, 1965).

4.1 Simplificação da Análise

Embora a utilização da simplificação através do conceito de circuito magnético produza para muitos problemas resultados convenientes, dentro de uma faixa de valores esperado, levando-se em consideração os dados utilizados e as condições impostas, ainda assim, existem inúmeros problemas que fazem com que o conceito de circuito magnético seja sempre uma aproximação, que em muitos casos possui uma precisão de aproximadamente 5% da resposta real. Existe uma série de razões para estas imprecisões, entre elas tem-se as relacionadas com os efeitos causados pelo fluxo disperso e as com relação aos cálculos das relutâncias (CHAPMAN, 2012; M.I.T, 1965).

Primeiramente o pressuposto de que todo o fluxo está confinado dentro de um núcleo magnético acaba por desconsiderar o efeito da dispersão, que possui um importante papel no projeto de máquinas elétricas rotativas. Assim como a área efetiva da seção transversal em entreferros é maior que a área da seção transversal do material do núcleo ferromagnético, em ambos os lados do entreferro, devido ao fluxo disperso (CHAPMAN, 2012; M.I.T, 1965).

E ao assumir um comprimento médio e uma área de seção transversal aproximada no cálculo das relutâncias do circuito, as aproximações deixam a desejar em geometrias que possuem muitos vértices. Como também a variação da permeabilidade em materiais ferromagnéticos, devido a quantidade de fluxo existente no material, faz com que o cálculo das relutâncias não tenha uma boa aproximação uma vez que estas dependem da permeabilidade do material (CHAPMAN, 2012; M.I.T, 1965).

A Figura 16(a) ilustra o circuito magnético de um motor de corrente contínua e a Figura 16(b) uma simplificação da análise do circuito magnético com os caminhos dos fluxos indicados por setas e as regiões para o cálculo das relutâncias por letras. Nota-se que a simetria da geometria facilita a análise.

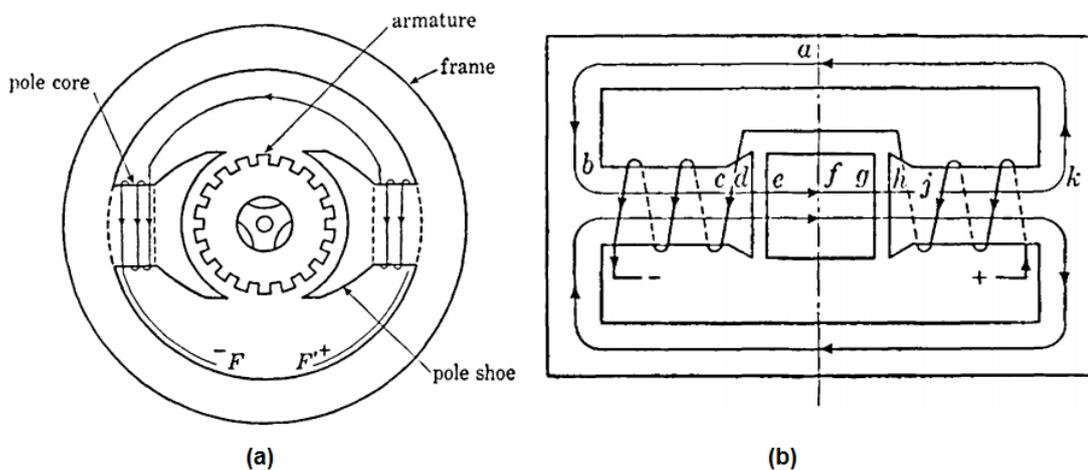


Figura 16: (a) Circuito magnético de um motor CC. (b) Simplificação da análise do circuito magnético.

Fonte: Adaptado de M.I.T, 1965.

É possível compensar parcialmente estas fontes inerentes de erro utilizando um caminho médio efetivo para o comprimento e uma área de seção transversal também efetiva, de modo a se levar em consideração as fontes de erro. Embora exista muitas limitações inerentes ao conceito de circuito magnético, os cálculos exatos utilizando as equações de Maxwell são muito

complexos, de forma que este ainda é uma ferramenta de projeto que facilita e simplifica os cálculos para obtenção de fluxo, força magnetomotriz e relutâncias, no projeto de dispositivos eletromagnéticos (CHAPMAN, 2012; M.I.T, 1965).

4.2 Analogia entre Circuitos Elétricos e Magnéticos

O conceito de circuito magnético baseia-se na ideia de que um fluxo, constante ou que varia lentamente, tende a limitar-se aos caminhos de alta permeabilidade de uma estrutura ferromagnética, de maneira que se assemelha à tendência de uma corrente elétrica de se limitar a caminhos de alta condutividade em um circuito elétrico. Este conceito possibilita relacionar as grandezas de um circuito elétrico, Figura 17(a), a um análogo magnético, Figura 17(b) (M.I.T, 1965).

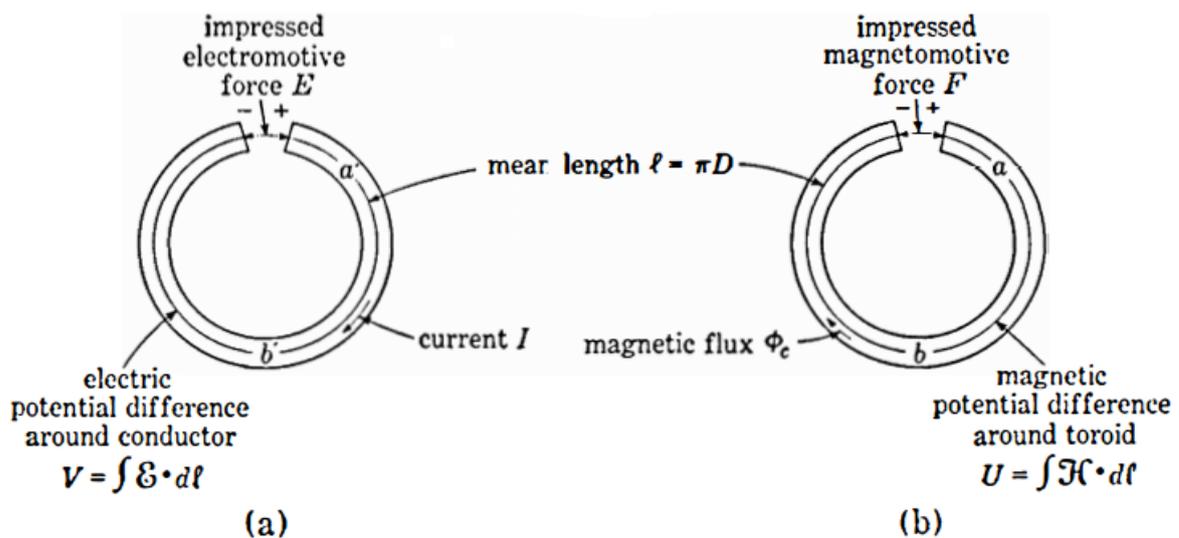


Figura 17: Analogia entre: (a) Um circuito elétrico, (b) Um circuito Magnético.

Fonte: M.I.T, 1965.

Desta forma, semelhante a lei de Ohm, o físico e engenheiro elétrico britânico John Hopkinson afirmou que um sistema magnético pode ser descrito como uma combinação de, uma "fonte" de magnetismo que juntamente com uma "carga" magnética, gera uma "corrente" magnética, o fluxo Φ (SCHMIDT, 2011). A suposta fonte de magnetismo (F) pode ser entendida como sendo a corrente elétrica multiplicada pelo número de espiras,

$$F = fmm = NI = \int H dl \quad (19)$$

Ou seja, é a força magnetomotriz (fmm) análogo a força eletromotriz (fem) de um circuito

elétrico.

A resistência magnética é denominada de Relutância (\mathfrak{R}), derivada do termo "relutante", e denota a resistência imposta pelo material a ser permeado por um campo magnético. A relutância magnética é definida por meio da seguinte relação (SCHMIDT, 2011),

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{A\mu} \quad (20)$$

Onde l é igual ao comprimento do caminho médio que o fluxo magnético deve seguir, A é a área da seção transversal do caminho e μ a permeabilidade magnética do material. Em comparação direta com o conceito de resistência elétrica, um elemento de circuito magnético é ilustrado na Figura 18.

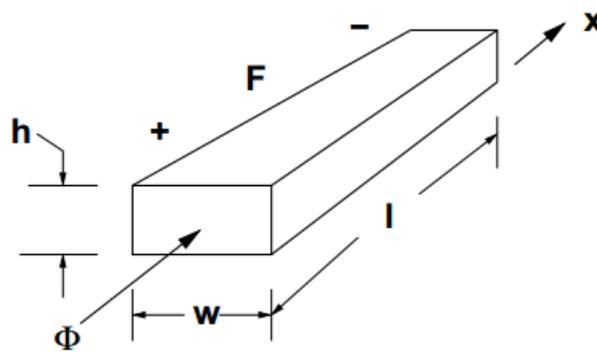


Figura 18: Relutância - Componente do circuito magnético.

Fonte: OPENCOURSEWARE, 2010.

Suponha que o material desse elemento tenha permeabilidade $\mu > \mu_0$, de modo que exista a seguinte relação constitutiva,

$$B_x = \mu H_x \quad (21)$$

Considerando a densidade do fluxo no material uniforme, então o fluxo total através do elemento é,

$$\Phi = AB_x = (hw)B_x = (hw)(\mu H_x) \quad (22)$$

E sendo F a "queda de tensão" magnética, também denominada de força magnetomotriz (fmm), entre uma extremidade à outra do material com uma distribuição uniforme,

$$F = lH_x \quad (23)$$

Então a relutância do elemento ilustrado na Figura 18 é obtido como,

$$\mathfrak{R} = \frac{F}{\Phi} = \frac{lH_x}{hw\mu H_x} = \frac{l}{hw\mu} = \frac{l}{A\mu} \quad (24)$$

Assim, ao considerar que a relutância \mathfrak{R} representa a quantidade de esforço que é necessária para produzir um fluxo magnético em um determinado material, logo uma superfície com área maior e valores mais altos da permeabilidade reduzirão esse esforço enquanto um comprimento de caminho médio mais longo o aumentará (SCHMIDT, 2011).

A partir destas definições, a lei do magnetismo de Hopkinson, análogo à lei de Ohm para circuitos elétricos, é equacionada conforme apresenta a Tabela 1.

Tensão Magnética	Fluxo Magnético	Relutância
$F = \Phi\mathfrak{R}$	$\Phi = F/\mathfrak{R}$	$\mathfrak{R} = F/\Phi$

Tabela 1: Lei de Hopkinson

Fonte: Adaptado de SCHMIDT, 2011.

Esta analogia se estende para as grandezas elétricas e magnéticas, conforme apresenta a Tabela 2.

Elétrico	Magnético
Densidade de Corrente $J(A/m^2)$	Densidade de Fluxo Magnético $B(Wb/m^2)$
Corrente $I(A)$	Fluxo Magnético $\phi(Wb)$
Intensidade de Campo Elétrico $E(N/C)$	Intensidade de Campo Magnético $H(A/m)$
Tensão $fem(V)$	Força Magnetomotriz $fmm(Ae)$
Condutividade $\sigma(S)$	Permeabilidade $\mu(Wb/Am)$
Resistência $R(\Omega)$	Relutância $\mathfrak{R}(Ae/Wb)$
Resistividade $\rho(\Omega m)$	Relutividade $\nu(Am/Wb)$
Condutância $G(S)$	Permeância $P(Wb/Ae)$

Tabela 2: Analogia entre grandezas de circuitos elétricos e magnéticos.

Fonte: Adaptado de SADIKU, 2006.

E até mesmo as leis de Kirchhoff apresentam uma equivalência, conforme apresenta Tabela 3. Desta forma é interessante notar que a associação de relutâncias, em série, paralelo, ou mista, possui a mesma equivalência algébrica que as associações de resistências em um circuito elétrico (CHAPMAN, 2012).

Circuito Elétrico	Circuito Magnético
$\sum I = 0$	$\sum \Phi = 0$
$\sum V - \sum RI = 0$	$\sum F - \sum \mathfrak{R}\Phi = 0$

Tabela 3: Leis de Kirchhoff
 Fonte: Adaptado de SADIKU, 2006.

4.3 Linearidade e Não-Linearidade

A análise inicial de um circuito elétrico ou magnético deve considerar a linearidade ou não-linearidade de seus componentes ou materiais, pois, o comportamento das grandezas deste circuito altera conforme este aspecto. Um exemplo disto ocorre ao ter-se uma permeabilidade variável no material magnético, que conseqüentemente resulta em uma relutância não-linear.

Para circuitos elétricos o comportamento das resistências lineares e não-lineares são apresentadas na Figura 19(a), e para circuitos magnéticos as relutâncias lineares e não-lineares na Figura 19(b).

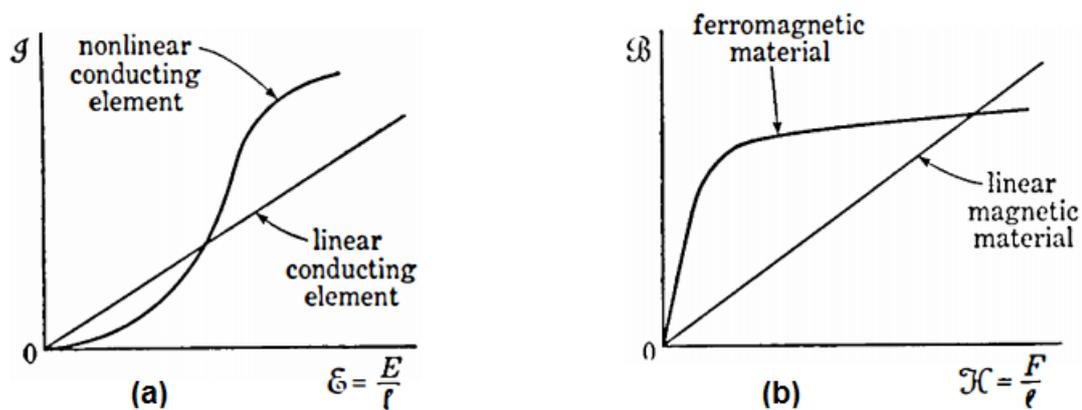


Figura 19: Linearidade e Não-Linearidade: (a) Circuitos elétricos. (b) Circuitos magnéticos.

Fonte: Adaptado de M.I.T, 1965.

O cálculo da intensidade de campo e fluxo dos entreferros de um material magnético linear para a estrutura da Figura 20, considerando S a área da seção transversal do núcleo, l o comprimento dos entreferros, todos iguais e constantes, sem dispersão de fluxo, e a permeabilidade do material do núcleo infinita sendo sua intensidade de campo desprezível. Os índices utilizados referem-se aos respectivos entreferros (CHAPMAN, 2012).

As quedas de tensões magnéticas no entreferros, pelos caminhos L_1 e L_2 são equacionadas respectivamente como,

$$NI = h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_4 l_4 \quad (25)$$

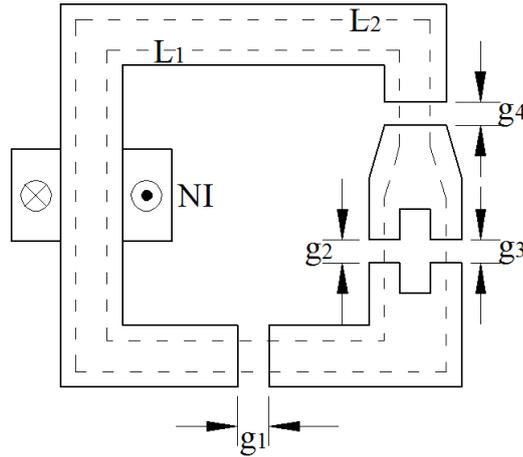


Figura 20: Estrutura magnética composta por núcleo de material magnético linear.
Fonte: Adaptado de BASTOS, 1989.

$$NI = h_1 l_1 + h_3 l_3 + h_4 l_4 \quad (26)$$

E o fluxo magnético através dos entreferros e caminhos L_1 e L_2 é,

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3 \implies \mu_0 h_1 S_1 = \mu_0 h_2 S_2 + \mu_0 h_3 S_3 \quad (27)$$

$$\phi_1 = \phi_4 \implies \mu_0 h_1 S_1 = \mu_0 h_4 S_4 \quad (28)$$

Devido as larguras dos entreferros serem diferentes, suas áreas são,

$$S_1 = S_4 = S \quad (29)$$

$$S_2 = S_3 = \frac{S}{3} \quad (30)$$

O sistema de equações lineares obtido a partir das Equações 25 a 30 é,

$$\begin{cases} \frac{NI}{l} = h_1 + h_2 + h_4 \\ \frac{NI}{l} = h_1 + h_3 + h_4 \\ h_1 = \frac{h_2}{3} + \frac{h_3}{3} \\ h_1 = h_4 \end{cases} \quad (31)$$

A solução do sistema linear em 31 resulta em,

$$h_1 = h_4 = \frac{2NI}{7l} \quad (32)$$

$$h_2 = h_3 = \frac{3 NI}{7 l} \quad (33)$$

$$\phi_1 = \phi_4 = \mu_0 \frac{2 NI}{7 l} \quad (34)$$

$$\phi_2 = \phi_3 = \mu_0 \frac{1 NI}{7 l} \quad (35)$$

Ao considerar o material do núcleo da estrutura magnética da Figura 21 não-linear, tem-se que a permeabilidade é finita e variável, logo é necessário que se conheça a curva $B(H)$ do material sendo a resolução do problema obtida através de um processo iterativo, uma vez que não se sabe o ponto da curva na qual o circuito opera (BASTOS, 1989).

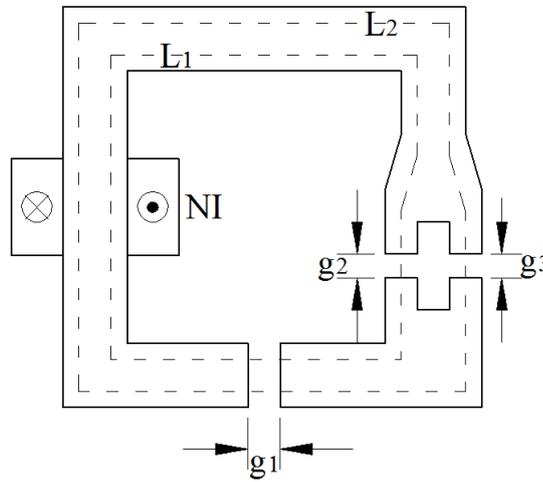


Figura 21: Estrutura magnética composta por núcleo de material magnético não-linear.

Fonte: Adaptado de BASTOS, 1989.

Onde, S é a área da seção transversal do material do núcleo, l o comprimento dos entreferros, todos iguais e constantes, sem dispersão de fluxo, l_f é o comprimento médio do caminho fechado que percorre o núcleo, e as intensidades de campo nos entreferros h_2 e h_3 possuem o mesmo valor. Assim as equações de circulação de campo e conservação de fluxo magnético são,

$$NI = h_1 l + h_2 l + h_3 l + h_f l_f \quad (36)$$

$$\phi_f = B_f S = \mu_f h_f S \quad (37)$$

$$\phi_1 = \mu_0 h_1 S \quad (38)$$

$$\phi_2 = \mu_0 h_2 \frac{S}{3} \quad (39)$$

$$\phi_3 = \mu_0 h_3 \frac{S}{3} \quad (40)$$

$$\phi_f = \phi_1 \implies \mu_f h_f = \mu_0 h_1 \quad (41)$$

$$\phi_1 = \phi_2 \implies h_2 = h_3 = \frac{3}{4} h_1 \quad (42)$$

Substituindo h_2 e h_3 da Equação 42 na Equação 36,

$$NI = \frac{5}{2} h_1 l + h_f l_f \quad (43)$$

E isolando h_f na Equação 41,

$$h_f = \frac{\mu_0}{\mu_f} h_1 \quad (44)$$

Desta forma pode-se iniciar o processo iterativo, fazendo $h_f^0 = 0$ obtém-se μ_f^0 através do cálculo da tangente do ângulo formado pela curva $B(H)$ neste ponto. Então as Equações 43 e 44 assumem a forma (BASTOS, 1989),

$$h_1^1 = \frac{2NI}{5l} \quad (45)$$

$$h_f^1 = \frac{\mu_0}{\mu_f^0} h_1^1 \quad (46)$$

Com o valor de h_f^1 obtém-se b_f^1 da curva $B(H)$ e calcula-se $\mu_f^1 = \frac{b_f^1}{h_f^1}$, assim h_f^1 é inserido na Equação 43 resultando em um novo valor h_1^2 ,

$$h_1^2 = (NI - h_f^1 l_f) \frac{2}{5l} \quad (47)$$

O resultado da Equação 47 é inserido na Equação 44 gerando um novo valor, h_f^2 . Este processo iterativo se repete até que exista uma convergência, delimitada por um valor de erro arbitrado. Encontrado o valor de convergência pode-se calcular os valores numéricos de h_2 e h_3 a partir da Equação 42. De modo geral o processo apresenta a seguinte formulação,

$$h_1^i = (NI - h_f^{i-1} l_f) \frac{2}{5l} \quad (48)$$

$$h_f^i = \frac{\mu_0}{\mu_f^{i-1}} h_1^i \quad (49)$$

Sendo que a partir da curva $B(H)$ do material não-linear obtém-se μ_f^i , a cada iteração.

4.4 Reta de Carga

Geralmente os problemas que envolvem cálculos de circuitos magnéticos visam determinar (M.I.T, 1965; MEZA, 2005):

(1) A força magnetomotriz necessária para produzir um fluxo ou uma densidade de fluxo desejada em uma região específica da estrutura.

(2) O fluxo ou a densidade de fluxo produzida em regiões específicas de uma estrutura magnética produzidos por uma força magnetomotriz ao longo de um caminho médio em toda a estrutura.

Os problemas do tipo (1) possuem resolução trivial uma vez que é conhecido o fluxo ou a densidade de fluxo magnético. A resolução de circuitos magnéticos do tipo (2), em sua maioria não lineares, pode ser resolvida a partir de métodos gráficos, onde se desenvolve a equação da reta de carga do dispositivo e se determina o ponto de operação $P(H, B)$ do mesmo (GOURISHANKAR; KELLY, 1973).

Para ilustrar tomemos um exemplo, considerando a estrutura magnética mostrada na Figura 22 com o núcleo constituído de chapas laminadas e fator de empilhamento de 0,9. As dimensões transversais do núcleo no entreferro são $W = 0,05m$ e $T = 0,06m$. O comprimento do entreferro é $l_g = 0,005m$. O comprimento médio do caminho magnético na porção de aço da estrutura magnética é de $1m$. Necessita-se determinar o fluxo no entreferro da estrutura magnética para uma força magnetomotriz, aplicada pelo enrolamento excitador, de $2000Ae$. Neste caso é desprezado o efeito do fluxo disperso (GOURISHANKAR; KELLY, 1973).

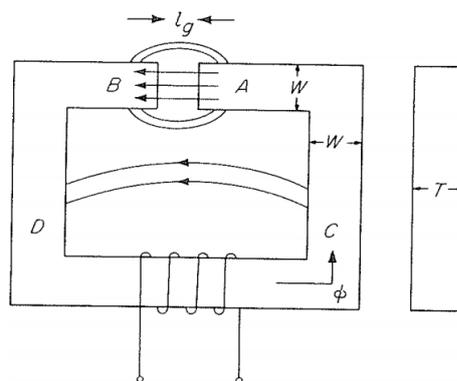


Figura 22: Estrutura magnética de núcleo ferromagnético laminado.

Fonte: Adaptado de GOURISHANKAR; KELLY, 1973.

Para a solução deste problema, inicialmente faz-se a simplificação da análise ao reduzir a estrutura da Figura 22 a um circuito magnético equivalente, conforme ilustra a Figura 23.

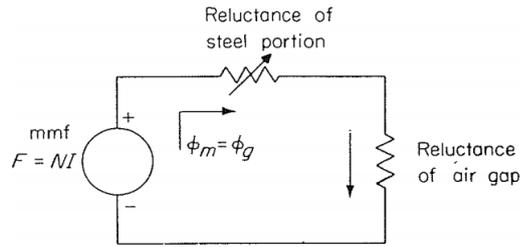


Figura 23: Circuito magnético equivalente.
Fonte: Adaptado de GOURISHANKAR; KELLY, 1973.

Sendo os lados opostos do entreferro paralelos e com a mesmas dimensões nas seções transversais, a área efetiva é calculada como,

$$A_g = (W + l_g)(T + l_g) = (0,05 + 0,005)(0,06 + 0,005) = 35,74 \times 10^{-4} m^2 \quad (50)$$

E a área efetiva da seção transversal do núcleo de material ferromagnético laminado é,

$$A_m = 0,9WT = (0,9 \times 0,06 \times 0,05) = 27 \times 10^{-4} m^2 \quad (51)$$

Assim, ao desconsiderar o fluxo disperso as seguintes relações se aplicam ao circuito,

$$F = NI = 2000Ae = H_g l_g + H_m l_m \quad (52)$$

$$\Phi_g = \Phi_m \text{ ou } (B_g A_g) = (M_m A_m) \quad (53)$$

Para a resolução pelo método gráfico, faz-se:

(1) Desenha-se a curva $\Phi_m \times F_m$ para o material magnético utilizado, esta curva é obtida a partir da curva $B_m \times H_m$ do material, multiplicando-se a ordenada por A_m (área do material em metros quadrados) e a abscissa por l_m (comprimento do caminho médio da estrutura magnética, em metros quadrados) (GOURISHANKAR; KELLY, 1973).

(2) O gráfico invertido de $\Phi_g \times F_g$ para o espaço livre é sobreposto ao gráfico de $\Phi_m \times F_m$, conforme ilustra Figura 24 (GOURISHANKAR; KELLY, 1973).

O comprimento OA representa a força magnetomotriz total (F), que é $2000Ae$. A inclinação do gráfico do entreferro invertido é $-P_g$, sendo P_g a permeabilidade do entreferro conforme Equação 54.

$$P_g = \frac{\mu_0 A_g}{l_g} = 9 \times 10^{-7} \text{ Wb/Ae} \quad (54)$$

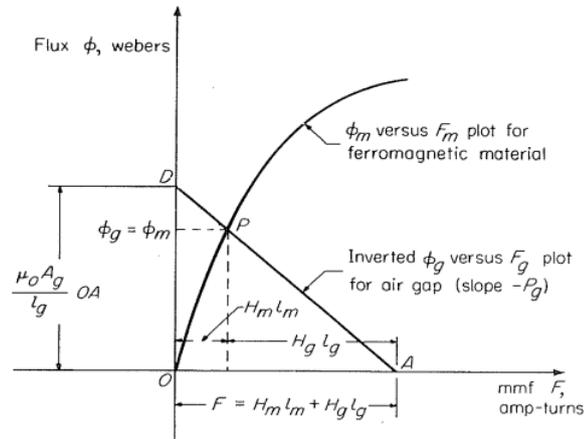


Figura 24: Sobreposição dos gráficos $\Phi \times F$: material ferromagnético e espaço livre.
Fonte: Adaptado de GOURISHANKAR; KELLY, 1973.

A interseção das curvas representado pelo ponto P na Figura 24, resulta em um valor comum desejado de fluxo e satisfaz as Equações 52 e 53 respectivamente. Entretanto como a maioria das curvas de magnetização são do tipo $B(H)$, não é necessário passar pela etapa (1) e traçar a curva $\Phi_m \times F_m$ para o material ferromagnético. Na Figura 24 se a ordenada for dividida por A_m e a abscissa por l_m , resulta na Figura 25 onde uma forma modificada do gráfico $\Phi_g \times F_g$ invertido é sobreposto a curva $B_m \times H_m$ (GOURISHANKAR; KELLY, 1973; M.I.T, 1965).

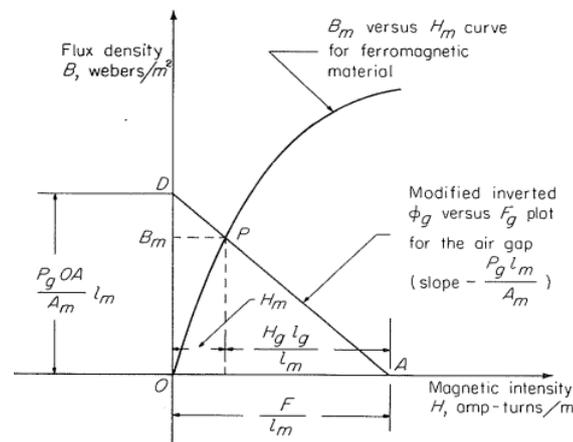


Figura 25: Sobreposição da curva $B_m \times H_m$ do material ferromagnético em $\Phi_g \times F_g$ invertido.
Fonte: Adaptado de GOURISHANKAR; KELLY, 1973.

O ponto de interseção P resulta diretamente no valor da densidade de fluxo magnético do material ferromagnético. A densidade de fluxo magnético no espaço livre é obtida da Equação 53. Assim, substituindo as incógnitas OA e OD por valores numéricos através das seguintes

relações:

$$OA = \frac{F}{l_m} = \frac{2000}{1} = 2000 Ae/m \quad (55)$$

$$OD = \frac{l_m}{A_m} OAP_g = \frac{1}{27 \times 10^{-4}} \times 2000 \times (9 \times 10^{-7}) = 0,667 Wb/m \quad (56)$$

E inserindo estes valores no gráfico da Figura 25, obtêm-se a reta AD conforme Figura 26.

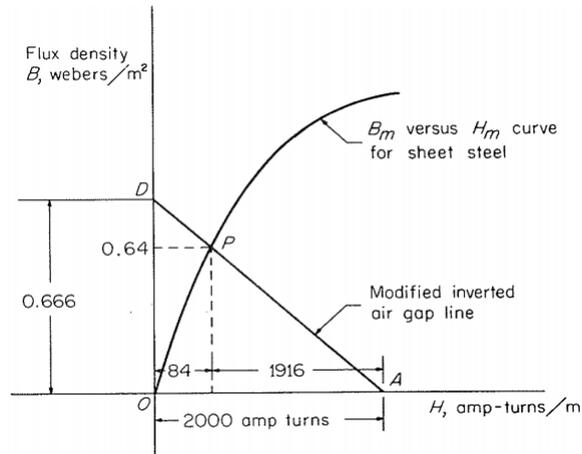


Figura 26: Valores numéricos da reta de carga.

Fonte: Adaptado de GOURISHANKAR; KELLY, 1973.

A curva $B_m \times H_m$ para a chapa de aço é ilustrada na Figura 27.

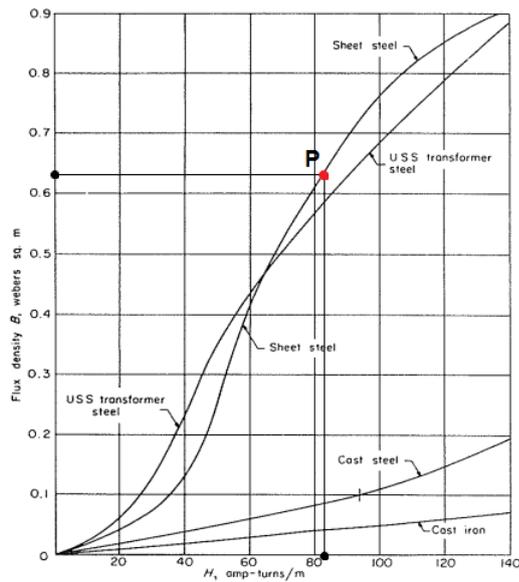


Figura 27: Curva $B_m \times H_m$ do material ferromagnético laminado.

Fonte: Adaptado de GOURISHANKAR; KELLY, 1973.

A interseção das duas curvas em P resulta em $B_m = 0,64T$, assim o fluxo no entreferro é

calculado como:

$$\Phi_g = \Phi_m = B_m A_m = 0,00173Wb \quad (57)$$

Este método de resolução pode ser estendido para a análise de circuitos elétricos e também circuitos magnéticos que utilizem mais de dois materiais (GOURISHANKAR; KELLY, 1973).

4.5 Parâmetros Concentrados

O conceito de circuito compreende a abstração de um sistema físico real, a partir da qual são impostas restrições que delimitam sua análise. O circuito é composto de elementos interconectados em um caminho fechado. Os elementos de circuito possuem dois atributos principais, o número de terminais para conexão a outros elementos e fácil modelagem matemática em termos das grandezas físicas que são relacionadas ao circuito (AGARWAL A. LANG, 2005; M.I.T, 1965).

Ao levar em conta o atraso de propagação das ondas eletromagnéticas dentro de um elemento do circuito e considerando que as grandezas físicas sejam funções do tempo e da posição, a análise envolve aplicação das equações de Maxwell caracterizando o circuito a parâmetros distribuídos. Esta análise aplicada a um dispositivo magnético através de métodos analíticos nem sempre é possível, e quando o são possuem elevada complexidade em geometria simples (AGARWAL A. LANG, 2005; M.I.T, 1965).

Assim os circuitos magnéticos, tal qual os elétricos, são modelados a parâmetros concentrados onde a propagação das ondas eletromagnéticas dentro dos fios condutores e elementos (resistores, relutâncias, indutores, etc.) é considerada instantânea. Pois, a facilidade em utilizar equações algébricas ao invés das equações de Maxwell possibilitam uma análise mais rápida e objetiva do problema. Embora existam outros métodos de modelagem e análise de circuitos magnéticos, como por elementos finitos, a análise por parâmetros concentrados possui uma relação aceitável entre velocidade de resolução e precisão (AGARWAL A. LANG, 2005; M.I.T, 1965).

Considerando a modelagem de dispositivos eletromagnéticos a parâmetros concentrados, o método de redes de relutância é um dos mais antigos sendo também aplicado à análise de linhas de transmissão (NUNES, 2013).

4.6 Método de Redes de Relutância

O método de redes de relutância baseia-se na leis de Hopkinson e de Kirchhoff para nós e malhas aplicadas ao magnetismo. Este é um dos métodos mais antigos de modelagem e cálculo de circuitos magnéticos a parâmetros concentrados em máquinas rotativas e transformadores (SYKULSKI, 1995; NUNES, 2013).

A utilização do método para modelagem de campo bidimensional e cálculo de fluxos magnéticos de transformadores ocorreu em meados de 1960, sendo que nesta mesma década surgiram modelos de redes de relutância tridimensionais, conforme ilustra Figura 28, compostos de vários nós para o cálculo aproximado de fluxos dispersos em transformadores de potência trifásicos (SYKULSKI, 1995; NUNES, 2013; PERHO, 2002).

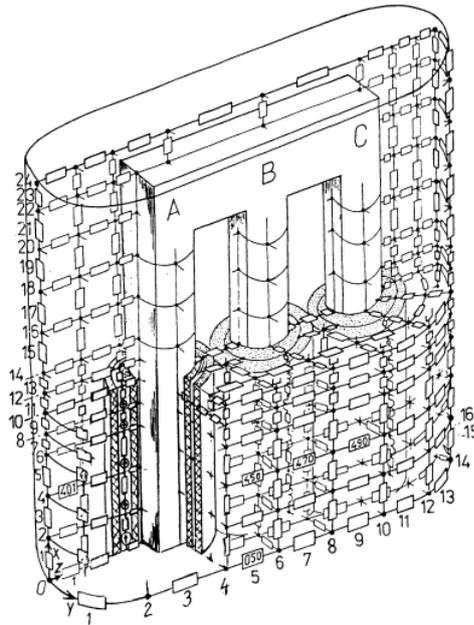


Figura 28: Modelo de rede de relutância tridimensional em um transformador de potência trifásico.

Fonte: SYKULSKI, 1995.

A flexibilidade em ser aplicado a uma vasta gama de problemas com diferentes geometrias e complexidades popularizou o método e expandiu sua pesquisa possibilitando a implementação computacional. Quando comparado aos métodos numéricos das diferenças finitas ou elementos finitos resulta em uma melhor performance de tempo de simulação computacional, porém menor precisão. Visto que isso não é problema em um estágio inicial de projeto, onde se necessita obter resultados para análise de forma rápida e não com a maior precisão possível (SYKULSKI,

1995; NUNES, 2013; PERHO, 2002).

A necessidade de modelar campos magnéticos alternados na presença de corpos metálicos sujeitos à correntes induzidas e com características não lineares fez com que fosse implementado modelos de relutâncias complexas. A partir disto vários autores têm utilizado e contribuído em pesquisas envolvendo o método, desde o cálculo de indutâncias e forças em dispositivos eletromagnéticos até problemas envolvendo campos transitórios (SYKULSKI, 1995; NUNES, 2013; PERHO, 2002).

5 CONCLUSÃO

Os dispositivos que fazem uso de campos eletromagnéticos para seu funcionamento, tais como motores, geradores e transformadores, necessitam de uma ferramenta de modelagem que seja rápida e eficiente em um primeiro momento na etapa de projeto. A análise destes dispositivos diretamente por meio das leis de Maxwell utilizando equações integro-diferenciais e modelos analíticos em muitos casos não é possível, principalmente em geometrias complexas.

A composição física destes dispositivos inclui materiais magnéticos com resposta linear e não-linear ao campo magnético externo aplicado, logo as propriedades intrínsecas de cada material alteram a distribuição do fluxo magnético em diferentes pontos, possibilitando concentra-lo ou dispersá-lo. Comumente o objetivo é de se utilizar um material de alta permeabilidade magnética para confinar o fluxo e assim obter uma maior densidade do mesmo no material, este objetivo se assemelha a utilização de material com alta condutividade elétrica em um circuito elétrico. Então análogo a um circuito elétrico a parâmetros concentrados pode-se analisar um dispositivo eletromagnético de forma simplificada através do conceito de circuito magnético.

Um circuito magnético embora seja uma simplificação com baixa precisão e que possua limitações em relação a modelagem do dispositivo real, ainda é uma importante ferramenta de projeto que facilita os cálculos para obtenção de fluxo, força eletromotriz e relutâncias. Além de possibilitar a implementação de diferentes métodos para a resolução do problema, como o método gráfico da reta de carga, ou o método iterativo através dos dados obtidos da curva $B(H)$ do material, ou ainda o método de redes de relutância que viabiliza a modelagem de campos magnéticos bi e tridimensionais, e também a aplicação do modelo computacionalmente.

Em virtude do que foi mencionado, esta monografia apresentou de forma sucinta e breve o conceito de circuito magnético em meio lineares e não-lineares, bem como suas características e métodos de resolução. Diante dos grandes desafios no projeto e otimização de dispositivos eletromagnéticos, o conceito de circuito magnético é sem dúvida uma ferramenta de grande valia aos projetistas e engenheiros.

REFERÊNCIAS

AGARWAL A. LANG, J. **Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits**. 1.ed. São Francisco: Morgan Kaufmann, 2005.

ALY, F. F. F. **Apostila de Aula**. Aplicação de Ímãs Permanentes de Terras Raras em Máquinas Elétricas. 2005.

BASTOS, J. P. A. **Eletromagnetismo e Cálculo de Campos**. 1.ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 1989.

CHAPMAN, S. J. **Electric Machinery Fundamentals**. 5.ed. New York: McGraw-Hill, 2012.

FERNANDES, R. P. **Desenvolvimento de um sistema de mapeamento de densidade de fluxo magnético**. Monografia: Universidade Federal do Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10003980.pdf>>. Acesso em: abril 2017.

FITZGERALD, A. **Electric Machinery**. 6.ed. New York: McGraw-Hill, 2003.

GOURISHANKAR, D.; KELLY, D. H. **Electromechanical Energy Conversion**. 2.ed. New York: Thomas Y. Crowell Company Publishers, 1973.

HAYT, W. H. **Eletromagnetismo**. 7.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

JILES, D. **Introduction to Magnetism and Magnetic Materials**. 1.ed. New York: Springer, 1991.

KRISHNAN, K. M. **Fundamentals and Applications of Magnetic Materials**. 1.ed. New York: Oxford University Press, 2016.

MEZA, M. A. R. R. A. **Modelagem de Curvas de Magnetização para Solução Iterativa de Circuitos Magnéticos Não Lineares**. Monografia: Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná.

M.I.T, E. S. **Magnetic Circuits and Transformers: a first course for power and communication engineers**. 1.ed. Massachusetts: M.I.T. Press, 1965.

NIST. **The International System of Units (SI)**. Disponível em:

<<http://physics.nist.gov/Pubs/SP330/sp330.pdf>>. Acesso em: abril 2017.

NUNES, A. S. **Cálculo de perdas por fluxo disperso e de forças em transformadores e reatores através do método de rede de relutâncias**. Dissertação. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

OPENCOURSEWARE, M. **Electromagnetic Energy: from motors to lasers**. Disponível em:

<<https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-007-electromagnetic-energy-from-motors-to-lasers-spring-2011>>. Acesso em: abril 2017.

PERHO, J. **Reluctance Network for Analysing Induction Machines**. Tese. Helsinki

University of Technology. Finland.

PYRHONEN, J. **Design of rotating electrical machines**. 2.ed. Finland: John Wiley and Sons, 2008.

SADIKU, M. N. O. **Elementos de eletromagnetismo**. 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

SCHMIDT, R. M. **The Design of High Performance Mechatronics: high-tech functionality by multidisciplinary system integration**. 1.ed. Amsterdam: Delft University Press, 2011.

SHAKELFORD, J. F. **Introduction to Materials Science for Engineers**. 7.ed. New York: Prentice Hall, 2008.

SPALDIN, N. A. **Magnetic Materials: fundamentals and applications**. 2.ed. New York: Cambridge University Press, 2010.

SYKULSKI, J. K. **Computational Magnetism**. 1.ed. London: Chapman and Hall, 1995.

ANEXO A CURVAS DE MAGNETIZAÇÃO DE MATERIAIS FERROMAGNÉTICOS

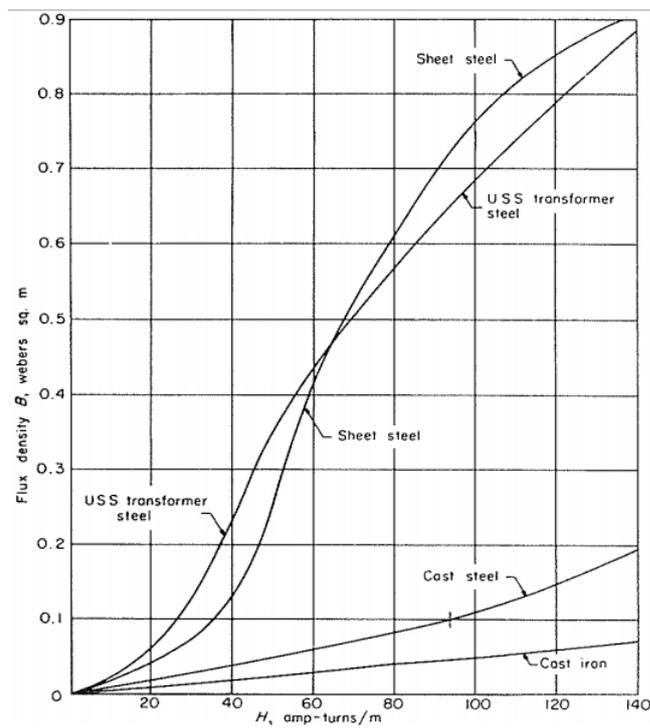
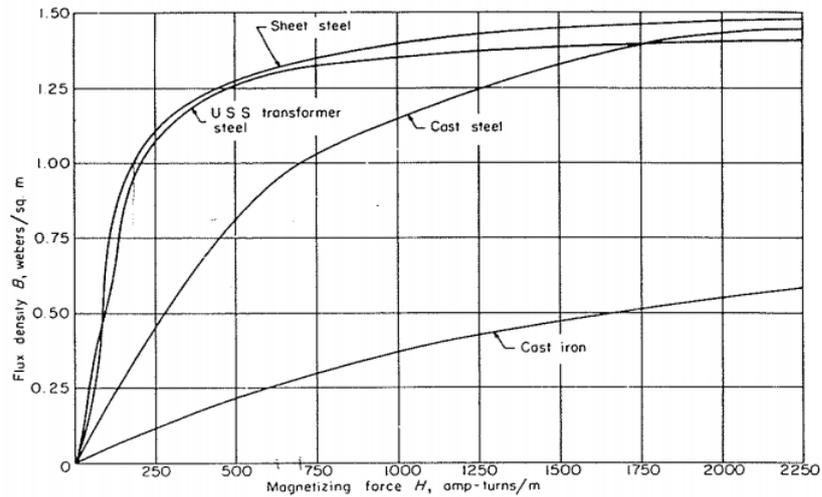


Figura 29: Curvas de Magnetização de Materiais Ferromagnéticos.

Fonte: Adaptado de GOURISHANKAR; KELLY, 1973