

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

EDUARDO COSTA BRAGA

**FORÇAS ELETROMAGNÉTICAS:
AMPÈRE, LORENTZ, LAPLACE E
RELUTÂNCIA**

Porto Alegre

2017

EDUARDO COSTA BRAGA

**FORÇAS ELETROMAGNÉTICAS:
AMPÈRE, LORENTZ, LAPLACE E
RELUTÂNCIA**

Monografia apresentada para a disciplina ELE218-
Análise de Sistemas Magnéticos A, oferecida pelo
PPGEE, da UFRGS, como parte dos requisitos
para a aprovação final do semestre.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ály Ferreira Flores Filho

Porto Alegre

2017

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma breve revisão bibliográfica à respeito das forças eletromagnéticas, de Ampère, Lorentz, Laplace e de Relutância, através de uma abordagem história e conceitual, salientando suas expressões matemáticas e aplicações em dispositivos eletromagnéticos. De modo que este estudo proporcione uma rápida referência e compreensão dos temas abordados, sendo que para uma abordagem mais específica e profunda dos temas, recomenda-se o estudo das referências bibliográficas mencionadas no texto.

Palavras-chave: Força de Ampère, Força de Lorentz, Força de Laplace, Força de Relutância, Forças Eletromagnéticas.

ABSTRACT

The present work aims to present a brief bibliographical review on the electromagnetic forces, Ampère, Lorentz, Laplace and Reluctance, through a history and conceptual, highlighting their mathematical expressions and applications in electromagnetic devices. So that this study provides a quick reference and understanding of the topics addressed, being that for a more specific and deep approach of the subjects, it is recommended the study of the bibliographical references mentioned in the text.

Keywords: Ampère Force, Lorentz Force, Laplace Force, Reluctance Force, Electromagnetic Forces.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Experimento da Ponte de Ampère.	10
Figura 2:	Experimento Repulsão por Forças Colineares.	10
Figura 3:	Fragmentos Resultantes da Explosão de Condutores.	11
Figura 4:	Força Eletromagnética para uma Partícula Carregada.	13
Figura 5:	Elemento Infinitesimal Condutor de Corrente Elétrica.	15
Figura 6:	Espira Retangular em um Campo Magnético Uniforme. (a) Vista Superior. (b) Vista em Seção Reta.	17
Figura 7:	Vista Frontal do Carro do Atuador Planar e Sentido da Força F_X	18
Figura 8:	Esquemático do Atuador de Movimento Axial de Relutância Variável.	22
Figura 9:	Esquemático do Atuador de Movimento Lateral de Relutância Variável.	25

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	FORÇA DE AMPÈRE	7
2.1	Forças entre Elementos de Corrente	7
2.2	Controversias e Experiência da Ponte de Ampère	9
3	FORÇA DE LORENTZ	12
3.1	Força Magnética sobre uma Carga Elétrica em Movimento	12
3.2	Determinação da razão e/m: experiência de J.J. Thomson	14
4	FORÇA DE LAPLACE	15
4.1	Ação do Campo Magnético em um Fio Condutor de Corrente Elétrica	15
4.2	Ação do Campo Magnético em uma Espira Condutora de Corrente Elétrica	16
4.3	Atuador Planar	18
5	FORÇA DE RELUTÂNCIA	21
5.1	Atuador de Movimento Axial	22
5.2	Atuador de Movimento Lateral	25
6	CONCLUSÃO	26
	REFERÊNCIAS	27

1 INTRODUÇÃO

O conceito de *força* em física obteve muitas variações históricas, desde o conceito aristotélico de empurrão e puxão, até o formalismo matemático descrito por Isaac Newton (1642-1727) em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em Londres em 1687, sendo que, este foi um tratado base de todo o desenvolvimento posterior da física.

Em eletromagnetismo o conceito de força foi inicialmente derivado da concepção newtoniana que se tinha na época. Diversos cientistas acreditavam que as forças elétricas e magnéticas se tratavam de forças de ação à distância tal qual os corpos celestes, de acordo com a lei da gravitação proposta por Newton.

Com a descoberta de um novo fenômeno que relacionava eletricidade e magnetismo, em 1820, por Hans Christian Oersted (1771-1851), onde este levantou a hipótese que o magnetismo em torno de um fio condutor de corrente era circular, uma vez que não existia o conceito de campo magnético. Esta descoberta seguida desta hipótese fez com que surgissem novas pesquisas na área de eletricidade e magnetismo, e mais cientistas começaram a explorar este universo pouco compreendido.

A força de Ampère, seguida da força de Lorentz, são as forças que possuem um caráter histórico e são mencionadas cronologicamente neste trabalho. A força de Laplace, embora não possua relatos que foi formulada por Pierre-Simon Laplace (1749-1827), recebeu seu nome possivelmente em homenagem, sendo derivada da expressão da força de Lorentz. Por último a força de relutância, que embora não possua uma seção histórica, recebe o nome da grandeza física que denota a oposição à permeância do fluxo magnético em um material. A força de relutância ocorre devido à variação de relutância em material por conta de variação da posição de um entreferro, ou por materiais de diferentes permeabilidades magnéticas.

Assim, é realizado uma pesquisa bibliográfica de modo a salientar as expressões matemáticas e aplicações das respectivas forças mencionadas. De modo que sirva como material introdutório e de rápida referência ao estudo das forças em dispositivos eletromagnéticos.

2 FORÇA DE AMPÈRE

Comparadas as forças gravitacionais descritas por Newton, no final do século XVIII com base nos experimentos de Charles-Augustin Coulomb (1736-1806), acreditava-se que as forças elétricas e magnéticas se tratavam de forças diretas à distância, variando com o inverso do quadrado da distância. De forma semelhante, Siméon-Denis Poisson (1781-1840) no início do século XIX utilizou a mesma análise matemática da gravitação para a dedução das forças elétricas e magnéticas, utilizando grandezas descritas por componentes cartesianas, pois, na época não existia o formalismo vetorial atual (MARTINS, 1986; SILVA, 2002; RIBEIRO, 2008).

Em 1820, Hans Christian Oersted (1771-1851) ao observar que uma agulha imantada sofria deflexão quando colocada próxima a um fio condutor por onde circulava corrente elétrica, evidenciou um novo fenômeno físico que relacionava eletricidade e magnetismo e que tornava a ideia de forças diretas à distância problemática (MARTINS, 1986; SILVA, 2002; RIBEIRO, 2008).

As primeiras reações significativas à descoberta de Oersted surgiram na França, embora fosse esperado pelos cientistas da época uma relação entre eletricidade e magnetismo, a interpretação de Oersted de que o campo magnético em torno do fio condutor de corrente era circular, foi rejeitada pelos cientistas franceses. Em especial por André-Marie Ampère (1775-1836), que desenvolveu uma abordagem eletrodinâmica onde substituía todos os efeitos magnéticos relatados no experimento de Oersted por forças à distância entre correntes elétricas. Ao publicar, em 1826, seu trabalho intitulado *Théorie des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience*, defendeu existir entre a corrente elétrica e a agulha imantada uma relação intrínseca de causa e efeito, através de forças que admitiam componentes colineares não nulas, denominada força de Ampère (ASSIS; CHAIB, 2015).

2.1 Forças entre Elementos de Corrente

A expressão para o cálculo da força entre elementos de corrente obtida por Ampère (1775-1836), entre 1820 e 1826, de forma experimental com o intuito de explicar a descoberta de Oersted de 1820, é descrita por (ASSIS; CHAIB, 2015; ASSIS; BUENO, 2015):

$$d^2 \vec{F}_{ji}^A = \frac{\mu_0 I_i I_j}{4\pi} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} [3(d\vec{r}_i \cdot \hat{r}_{ij})(d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij}) - 2(d\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j)] \quad (1)$$

Considerando que a Equação 1 utiliza unidades do sistema internacional (SI) e que emprega notação vetorial, tem-se que, $d^2 \vec{F}_{ji}^A$ é a força de Ampère, atuando no elemento de corrente $I_i d\vec{r}_i$, localizado no vetor posição \vec{r}_i em relação à origem O de um sistema de referência inercial, devida ao elemento de corrente $I_j d\vec{r}_j$, localizado em \vec{r}_j . Onde, μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo, r_{ij} é a distância entre os elementos de corrente, sendo \hat{r}_{ij} o versor unitário apontando de $I_j d\vec{r}_j$ para $I_i d\vec{r}_i$ (ASSIS; CHAIB, 2015; ASSIS; BUENO, 2015).

É importante ressaltar que a unidade de medida de corrente elétrica no sistema internacional é o Ampère, sendo esta uma unidade fundamental, e definida como: "O Ampère é a intensidade de uma corrente elétrica constante que, se mantida em dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito, de seção circular desprezível, e situado à distância de 1 metro entre si, no vácuo, produz entre estes condutores uma força igual a 2×10^{-7} Newton por metro de comprimento", ou seja, está diretamente relacionada com a força entre elementos de corrente (NIST, 2008).

Embora a força de Ampère tenha sido largamente aceita na época, inclusive por Maxwell que o chamou de "Newton da eletricidade", atualmente esta é pouco conhecida, sem qualquer referência em livros didáticos de diferentes níveis de ensino. Um possível motivo para esta obsolescência advém, conforme observa-se da Equação 1, que não há nenhum termo se referindo à colaboração de um elemento magnético ou campo magnético, pois, o conceito de campo magnético não era adotado até então, sendo que Ampère acreditava que todo o magnetismo era proveniente somente da interação entre elementos de corrente (ASSIS; CHAIB, 2015; ASSIS; BUENO, 2015).

É trivial encontrar em livros didáticos, para o cálculo da força entre dois elementos de corrente, um termo que considera os campos magnéticos gerados por ambos elementos, este termo é denominado de lei de Biot-Savart. Esta expressão foi obtida por estes dois cientistas em 1820, ao estudar a interação de um longo fio retilíneo percorrido por corrente elétrica com um ímã permanente, realizaram esta experiência motivados, assim como Ampère, pelo anúncio da descoberta de Oersted (ASSIS; CHAIB, 2015; SADIKU, 2006).

Considerando dois elementos de corrente $I_1 d\vec{l}_1$ e $I_2 d\vec{l}_2$, de acordo com a lei de Biot-Savart, ambos geram campos magnéticos. Desta forma, a força sobre o elemento $I_1 d\vec{l}_1$ devido ao campo $d\vec{B}_2$, gerado pelo elemento de corrente $I_2 d\vec{l}_2$, é dado por (EDMINISTER, 1980; SADIKU,

2006; HAYT, 2008; GRIFFITHS, 2011; NUSSENZVEIG, 1997):

$$d(\vec{F}_1) = I_1 d\vec{l}_1 \times d\vec{B}_2 \quad (2)$$

Onde o campo $d\vec{B}_2$ é dado pela lei de Biot-Savart:

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a}_{R21}}{4\pi R_{21}^2} \quad (3)$$

Embora a expressão da força entre elementos de corrente obtida por Ampère não seja difundida atualmente, sendo trivialmente utilizada a lei de Biot-Savart, a expressão da força de Ampère satisfaz o princípio de ação e reação, $d^2\vec{F}_{ji} = -d^2\vec{F}_{ij}$, e é a única que permite interação longitudinal entre elementos de corrente colineares. (ASSIS; CHAIB, 2015; SADIKU, 2006).

Entretanto, a interação longitudinal contraria as expressões de forças eletromagnéticas adotadas em conjunto com a teoria de Maxwell, uma vez que, de acordo com Ampère, em um fio metálico que transporta uma corrente deve haver uma força repulsiva entre dois elementos consecutivos, e de acordo com as demais expressões, a força deve ser perpendicular ao elemento de corrente. Esta é uma questão que não obteve muita atenção por parte de pesquisadores até a década de 1980, onde novos resultados experimentais e teóricos foram publicados em vários periódicos, por diversos autores, mas apesar de decorridos tantos anos e artigos publicados esta é uma questão que continua em aberto e sem um consenso entre os pesquisadores (ASSIS; BUENO, 2015; ASSIS; CHAIB, 2015; EDMINISTER, 1980; SADIKU, 2006).

2.2 Controversias e Experiência da Ponte de Ampère

Quando Ampère, em 1822, obteve a expressão final de sua força entre elementos de corrente, conforme representada em notação vetorial na Equação 1, obteve também uma notável consequência desta expressão ao deduzir, experimentalmente, que pequenas porções de corrente se repeliam sobre uma mesma reta. Este experimento foi verificado por Auguste de La Rive, à pedido de Ampère, tendo este confirmado o fato experimental. O experimento conhecido como Ponte de Ampère, conforme ilustra Figura 1, realizado por Ampère e Auguste de La Rive, confirmou a existência de forças colineares em condutores retilíneos (ASSIS; CHAIB, 2015; ASSIS; BUENO, 2015; GRANEAU, 1994, 1996).

O experimento da Ponte de Ampère, ilustrado na Figura 1, consiste de um condutor de corrente elétrica isolado, exceto nas extremidades, representado pelo segmento *sppm*, que se

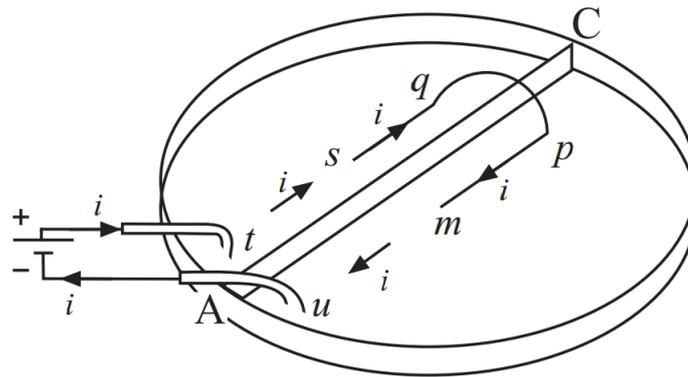


Figura 1: Experimento da Ponte de Ampère.
Fonte: Adaptado de ASSIS; BUENO, 2015.

encontra dentro de um prato com uma divisão ao meio, onde ambos lados são preenchidos com mercúrio líquido. Com os terminais de uma bateria conectados em cada um dos lados do prato imersos no mercúrio. Quando flui uma corrente no circuito, seja no sentido horário ou anti-horário, a ponte vai de A para C. De acordo com Ampère, a explicação para esse movimento é principalmente devida à repulsão que ocorre entre a corrente i , no segmento ts do mercúrio, e a corrente i , no segmento sq da ponte, assim como à repulsão entre a corrente i , no segmento um do mercúrio, e a corrente i , no segmento mp da ponte (ASSIS; CHAIB, 2015; ASSIS; BUENO, 2015; GRANEAU, 1994, 1996).

Esta é uma das experiências mais importantes de Ampère. Durante a década de 1980, vários pesquisadores revisaram essa experiência. Peter Graneau, no M.I.T., observou em 1981, com correntes de várias centenas de Ampères, uma forte turbulência no mercúrio quando o condutor do experimento da Ponte de Ampère foi mantido fixo. Essa turbulência denotava a repulsão sofrida pela região no mercúrio que carregava a corrente. Em outro experimento, Graneau colocou duas hastes de cobre curtas de ponta a ponta em um canal estreito retilíneo preenchido com mercúrio. Quando este canal era percorrido uma corrente elétrica de 450 A, as duas hastes se repeliam, conforme ilustra Figura 2 (GRANEAU, 1994, 1996).

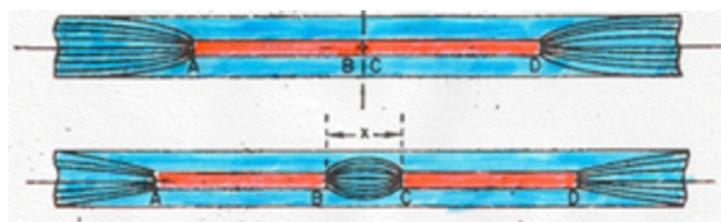


Figura 2: Experimento Repulsão por Forças Colineares.
Fonte: Adaptado de GRANEAU, 1996.

Graneau, na década de 1980, repetiu o experimento de Jan Nasilovski, que observou a ruptura de condutores elétricos em fragmentos devido à altas correntes, conforme ilustra Figura 3, com correntes de aproximadamente 5000 A, mas de curta duração, de modo a evitar que o metal alcançasse o ponto de fusão. Ao analisar a estrutura microscópica das regiões de ruptura concluiu-se ser por tensão mecânica, evidenciando a força de repulsão descrita por Ampère. Estes experimentos foram apresentados como provas para a existência de forças longitudinais, porém, existem muitas interpretações alternativas em discussão no meio acadêmico (GRANEAU, 1994, 1996).

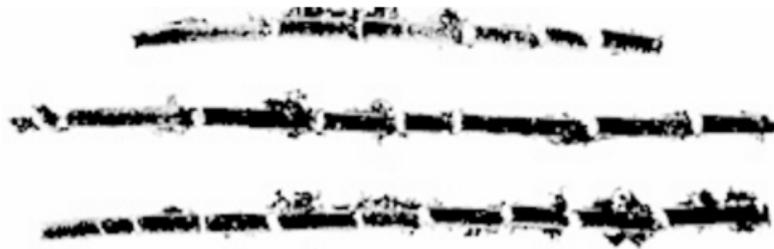


Figura 3: Fragmentos Resultantes da Explosão de Condutores.
Fonte: Adaptado de GRANEAU, 1996.

As forças longitudinais nos condutores estão ausentes na maioria dos livros sobre eletromagnetismo, contudo, existe produção científica em busca de respostas e validações de sua existência, sendo que seus efeitos potenciais ocorrem apenas em intensidades de correntes altas (ASSIS; CHAIB, 2015; GRANEAU, 1994, 1996; ASSIS; BUENO, 2015).

No entanto, de acordo com alguns autores, o eletromagnetismo de Maxwell não exclui a existência de tensões longitudinais, desde que estas sejam aplicadas através da teoria dos tensores de estresse de Maxwell, não possuindo qualquer relação com a expressão da força de Ampère, sendo esta, motivo de controvérsias entre diversos pesquisadores (ASSIS; CHAIB, 2015; GRANEAU, 1994, 1996; ASSIS; BUENO, 2015).

3 FORÇA DE LORENTZ

Embora muitos cientistas, como Ampère, não tivessem aceitado a ideia de campo magnético circular proposta por Oersted, outros exploraram este novo conceito. O físico inglês Michael Faraday (1791-1867), não aceitava o modelo newtoniano da ação de forças à distância aplicado ao eletromagnetismo, ao realizar experimentos com ímãs descrevendo movimentos circulares em torno de condutores de corrente elétrica, deduziu existir linhas de força magnética girando em torno de si próprias, considerando a existência destas linhas de força em um meio chamado éter, definindo o conceito de campo magnético em 1851 (ASSIS; CHAIB, 2015).

O conceito de campo magnético foi adotado por James Clerk Maxwell (1831-1879) em seu livro, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, publicado em 1873, onde formaliza matematicamente as relações entre eletricidade, magnetismo e ondas eletromagnéticas, de forma que, os conceitos mecanicistas da ação de forças à distância aplicado ao eletromagnetismo foram caindo em desuso (SILVA, 2002; RIBEIRO, 2008).

Em 1864, Maxwell já havia deduzido uma expressão onde campos magnéticos exercem forças sobre cargas em movimento, e em 1892 o físico holandês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) publicou um artigo relatando ter obtido a expressão da força sentida por uma carga em movimento submetida a um campo elétrico e um campo magnético. Sendo esta expressão intitulada de força de Maxwell-Lorentz, ou de forma mais trivial de força de Lorentz (SILVA, 2002; RIBEIRO, 2008).

3.1 Força Magnética sobre uma Carga Elétrica em Movimento

As partículas carregadas podem ser influenciadas por forças elétricas e por forças magnéticas. Porém, para que exista uma força magnética é necessário que a carga esteja em movimento, entretanto a força elétrica independe de movimento. A Equação 4 apresenta a força elétrica em uma partícula carregada (EDMINISTER, 1980; HAYT, 2008; SADIKU, 2006; COMPTON, 1986).

$$\vec{F}_e = Q\vec{E} \quad (4)$$

Como se observa, a força, \vec{F}_e , está na mesma direção e sentido da intensidade de campo elétrico, para uma carga positiva, e é diretamente proporcional à \vec{E} e Q , podendo, também, realizar

trabalho sobre a carga e mudar sua energia cinética (HAYT, 2008; SADIKU, 2006; COMPTON, 1986).

Por outro lado, considerando, uma partícula carregada em movimento, imersa em uma região onde exista um campo magnético com densidade de fluxo \vec{B} , esta experimenta uma força, \vec{F}_m , cuja intensidade é proporcional ao produto das intensidades da carga Q , da sua velocidade \vec{v} , da densidade de fluxo \vec{B} e do seno do ângulo entre os vetores \vec{v} e \vec{B} . A direção da força é perpendicular a ambos, \vec{v} e \vec{B} , e seu sentido é dado por um vetor unitário que define o sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$. A força magnética pode então ser expressa como (HAYT, 2008; SADIKU, 2006; COMPTON, 1986):

$$\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (5)$$

Ao contrário da força elétrica, F_e , a força magnética, F_m , depende da velocidade da carga e é normal à ela, além de não realizar trabalho porque é perpendicular à direção do movimento da carga ($\vec{F}_m d\vec{l} = 0$), logo essa força não causa aumento na energia cinética da carga. A magnitude de \vec{F}_m é geralmente pequena se comparada à de \vec{F}_e , exceto quando as velocidades envolvidas são altas (HAYT, 2008; SADIKU, 2006; COMPTON, 1986).

Desta forma, uma carga Q em movimento, na presença de um campo elétrico e de um campo magnético, experimenta uma força total, resultante da soma entre as parcelas de força elétrica e magnética,

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6)$$

A Equação 6 é conhecida como Força de Lorentz, e possui muitas aplicações em física e engenharia, pois, através desta expressão é possível determinar a força em partículas carregadas sob a ação de campos elétricos e magnéticos combinados, e também relacionar a força eletromagnética com a força mecânica. A Figura 4, apresenta as expressões das forças eletromagnéticas para uma partícula carregada, conforme o estado cinético em que esta se encontra (HAYT, 2008; SADIKU, 2006; COMPTON, 1986).

Estado da partícula	Campo E	Campo B	Campos E e B combinados
Estática	QE	—	QE
Em movimento	QE	$Qu \times B$	$Q(E + u \times B)$

Figura 4: Força Eletromagnética para uma Partícula Carregada.
Fonte: Adaptado de SADIKU, 2006.

3.2 Determinação da razão e/m : experiência de J.J. Thomson

A experiência que confirmou pela primeira vez a existência do elétron como partícula elementar de carga negativa e possuindo massa bem definida, foi realizada por Sir J.J. Thomson em 1897. Ao igualar a força de Lorentz com a força centrípeta, conforme Equações 7 e 8 (COMPTON, 1986; SIDHARTH; MICHELINI; SANTI, 2011),

$$F_{Lorentz} = F_{Centripeta} \quad (7)$$

$$Q \cdot v_0 \cdot B = m \frac{v_0^2}{r} \quad (8)$$

E ao isolar valores desconhecidos no lado esquerdo da equação, ficando com valores conhecidos no lado direito, obteve:

$$\frac{Q}{m} = \frac{v_0}{r \cdot B} \quad (9)$$

Deste modo, Thomson conseguiu determinar a razão massa-carga do elétron, sendo que, a relação Q/m é denominada de carga específica de uma partícula. Assim, sabendo que os raios catódicos são elétrons, podemos determinar a carga específica de um elétron, através de (COMPTON, 1986; SIDHARTH; MICHELINI; SANTI, 2011):

$$\frac{e}{m_e} = \frac{v_0}{r \cdot B} \quad (10)$$

Portanto, através da aplicação da força de Lorentz foi possível determinar a razão massa-carga de um elétron, sendo esta uma quantidade física amplamente utilizada em eletrodinâmica de partículas, e de grande relevância no desenvolvimento da teoria atômica moderna (COMPTON, 1986; SIDHARTH; MICHELINI; SANTI, 2011).

Algumas outras aplicações que fazem uso da força de Lorentz são: o espectrômetro de massa, os tubos de raios catódicos, sensores que utilizem o efeito Hall e medidores de vazão eletromagnéticos (COMPTON, 1986; SIDHARTH; MICHELINI; SANTI, 2011).

4 FORÇA DE LAPLACE

A força de Laplace é definida como sendo a força exercida sobre cada elemento infinitesimal de comprimento linear de um condutor, percorrido por uma corrente elétrica, quando submetido à uma região onde exista um campo magnético. Ou seja, quando campos magnéticos exercem forças sobre correntes elétricas. Esta força é perpendicular ao plano formado pelo campo magnético e o elemento infinitesimal considerado. A força de Laplace pode ser obtida a partir da expressão da força de Lorentz (CUNHA, 2016; USTHB, 2008).

4.1 Ação do Campo Magnético em um Fio Condutor de Corrente Elétrica

Considerando um volume de elemento condutor de comprimento $d\vec{l}$, com seção transversal S e transportando uma corrente elétrica I é atravessado a cada instante pelo mesmo número N de cargas elétricas Q , dado por (USTHB, 2008):

$$dQ = Nq \quad (11)$$

Este volume de elemento condutor é então submetido a um campo magnético \vec{B} , conforme ilustra Figura 5.

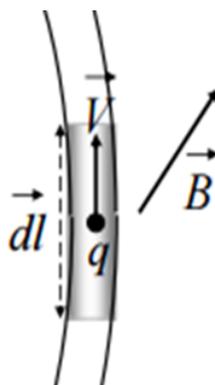


Figura 5: Elemento Infinitesimal Condutor de Corrente Elétrica.
Fonte: Adaptado de USTHB, 2008.

Desta forma, pode-se aplicar a expressão da força de Lorentz, desconsiderando o campo elétrico \vec{E} :

$$d\vec{F} = dQ\vec{V} \times \vec{B} \quad (12)$$

Assim a Equação 11 pode ser reescrita de acordo com a densidade volumétrica de cargas, ρ , dada por:

$$dQ = \rho S d\vec{l} \quad (13)$$

Substituindo a Equação 13 na Equação 12, tem-se:

$$d\vec{F} = \rho \vec{V} S d\vec{l} \times \vec{B} \quad (14)$$

Como $\rho \vec{V} S = I$, então a Equação 14, pode ser reescrita como:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (15)$$

Sendo a Equação 15 a expressão para a força de Laplace, através dela é possível definir o campo magnético \vec{B} como a força por elemento de corrente unitário (SADIKU, 2006).

4.2 Ação do Campo Magnético em uma Espira Condutora de Corrente Elétrica

Para o caso de uma espira condutora de corrente elétrica sob a ação de um campo magnético paralelo e constante, é possível utilizar a expressão da força de Laplace para determinar o torque sobre a espira. Com a expressão do torque dado por (SADIKU, 2006; EDMINISTER, 1980):

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (16)$$

Onde, \vec{T} é o torque resultante sobre a espira (em Nm), \vec{r} é o braço de alavanca (em m), e \vec{F} é a força (em N).

Considerando a espira retangular, de comprimento l , largura w e área S , ilustrada na Figura 6(a), é possível observar que $d\vec{l}$ é paralelo a B ao longo dos lados 1 – 2 e 3 – 4 da espira, sendo que nenhuma força é exercida sobre estes lados. Então nos lados em que B é perpendicular, aplicando a Equação 15 tem-se (SADIKU, 2006; EDMINISTER, 1980):

$$F = F_o - F_o = I \int_2^3 d\vec{l} \times \vec{B} - I \int_4^1 d\vec{l} \times \vec{B} = I \vec{B} \vec{l} - I \vec{B} \vec{l} = 0 \quad (17)$$

Logo, nenhuma força é exercida sobre a espira como um todo. Porém, devido à F_o e $-F_o$ agirem em diferentes pontos sobre a espira, acabam por gerar um conjugado. Se a componente

normal ao plano da espira, a_n , faz um ângulo α com B , como ilustrado na Figura 6(b), o torque sobre a espira é dado por (SADIKU, 2006; EDMINISTER, 1980):

$$|T| = |F_o|wsen\alpha = BI(lw)sen\alpha = BISsen\alpha \quad (18)$$

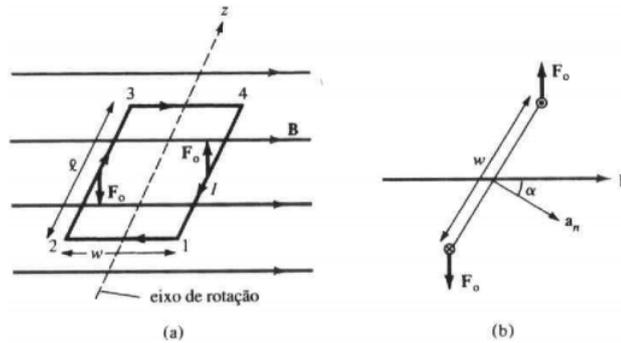


Figura 6: Espira Retangular em um Campo Magnético Uniforme. (a)Vista Superior. (b) Vista em Seção Reta.

Fonte: Adaptado de SADIKU, 2006.

Possibilitando, desta forma, deduzir o momento de dipolo magnético da espira, m , como sendo o produto entre a corrente e a área da espira, com direção perpendicular à espira (SADIKU, 2006; EDMINISTER, 1980).

$$m = ISa_n \quad (19)$$

Substituindo a Equação 19 na Equação 18 é possível obter-se a expressão para o torque sobre uma espira plana, de qualquer forma, desde que seja submetida à um campo magnético uniforme, dada por:

$$T = m \times B \quad (20)$$

Portanto, através da expressão da força de Laplace, deduzida a partir da força de Lorentz, é possível determinar o torque sobre uma espira plana de qualquer formato, estando está sujeita a um campo magnético constante. Sendo que, o conceito de torque sobre uma espira de corrente em um campo magnético possui grande relevância no estudo de máquinas elétricas rotativas (SADIKU, 2006; EDMINISTER, 1980).

4.3 Atuador Planar

A expressão da força de Laplace também possibilita a análise da força de propulsão em motores planares, como em um atuador planar. Neste tipo de motor, o movimento translacional ocorre da interação entre a densidade de fluxo magnético dos ímãs permanentes fixados em um dispositivo de tração, denominado de carro, com a corrente elétrica aplicada aos enrolamentos de fase na armadura. O carro é conectado a um sistema de suspensão através de uma placa de material não magnético. O sistema de suspensão, formado por dois trilhos e quatro rolamentos lineares por eixo, possibilita ao carro o movimento bidirecional planar com dois graus de liberdade (plano (x, y)) (MARILIA, 2003).

A Figura 7 ilustra a vista frontal do carro com dois ímãs de alto produto energético, $IP1$ e $IP2$, e uma seção da armadura com as fases excitadas por corrente elétrica. No entreferro as componentes, normais à superfície da armadura, da densidade de fluxo magnético nos ímãs permanentes, B_{gz1} e B_{gz2} , interagem com as densidades de corrente elétrica, J_{y1} e J_{y2} , produzidas pelos enrolamentos das fases da armadura (MARILIA, 2003).

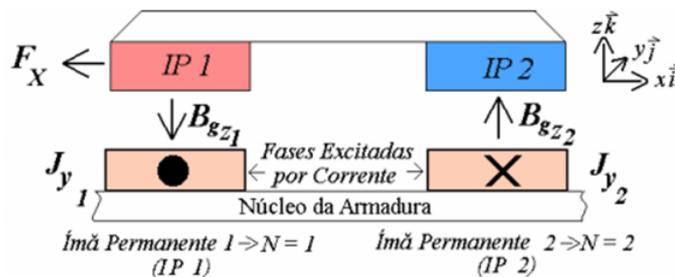


Figura 7: Vista Frontal do Carro do Atuador Planar e Sentido da Força F_X
 Fonte: Adaptado de MARILIA, 2003.

Na Figura 7 é apresentado o sentido do vetor força mecânica de origem eletromagnética, que atua sobre o carro, resultante da interação entre os vetores densidade de corrente elétrica nos condutores dos enrolamentos da armadura e densidade de fluxo magnético no entreferro, denotada por F_X (MARILIA, 2003).

Através da expressão da força de Laplace, Equação 15, obtêm-se a força eletromagnética de propulsão, que movimentará translacionalmente o carro devido à interação da indução dos ímãs permanentes com a densidade de corrente das fases da armadura. Considerando que o dispositivo, embora de movimento planar, possui uma distribuição de campo eletromagnético tridimensional, ao invés de um segmento linear de elemento condutor infinitesimal é aplicada uma integração do volume infinitesimal, de forma a se obter a força planar de propulsão, dada

por (MARILIA, 2003):

$$\vec{F}_N = \int_{V_N} \vec{J}_N \times \vec{B}_{gN} dV_N \quad (21)$$

Onde, \vec{F}_N é o vetor força eletromagnética planar de propulsão relacionada com o ímã permanente N , \vec{J}_N é o vetor densidade de corrente nas fases dos enrolamentos da armadura localizadas sob o ímã permanente N , \vec{B}_{gN} é a densidade de fluxo magnético no entreferro relacionada com o ímã permanente N e V_N é o volume de integração, corresponde ao volume dos condutores com corrente que estão imersos no fluxo magnético produzido pelo ímã permanente N (MARILIA, 2003).

Como o carro se desloca sobre o plano e conseqüentemente o campo magnético dos ímãs permanentes também, para determinar o sentido da força que atua sobre o carro, a Equação 21 é reescrita como (MARILIA, 2003):

$$\vec{F}_N = \int_{V_N} -(\vec{J}_N \times \vec{B}_{gN}) dV_N = \int_{V_N} (\vec{B}_{gN} \times \vec{J}_N) dV_N \quad (22)$$

A produção de força sobre o plano, ao longo dos eixos x e y , considera a componente normal da densidade de fluxo magnético na direção de z e duas componentes do vetor densidade de corrente, uma na direção de x e outra na direção de y , desta forma a Equação 22 fica (MARILIA, 2003):

$$\vec{F}_N = \int_{V_N} (B_{gzN} \vec{k} \times (J_{xN} \vec{i} + J_{yN} \vec{j})) dV_N = -F_{xN} \vec{i} + F_{yN} \vec{j} \quad (23)$$

Onde, F_{xN} é a componente x da força eletromagnética produzida por uma fase do enrolamento de mesmo índice e que possui uma densidade de corrente igual a J_{yN} , enquanto que F_{yN} é a componente y da mesma força produzida por uma fase do enrolamento y que possui uma densidade de corrente igual a J_{xN} , ambas, sob a ação do ímã permanente N (MARILIA, 2003).

Considerando o efeito dos dois ímãs permanentes, ou seja, $N1$ e $N2$, resulta uma força eletromagnética planar total \vec{F} , que atua sobre o carro e define o sentido de seu movimento, sendo este consequência do módulo e do sentido das correntes nas fases que estão ativas e também do sentido da densidade de fluxo no entreferro. Desta forma, a força planar total obtida a partir da expressão da força de Laplace é descrita conforme Equação 24 (MARILIA, 2003):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -(F_{x1} + F_{x2}) \vec{i} + (F_{y1} + F_{y2}) \vec{j} \quad (24)$$

Pelo exposto, é possível notar que a força de Laplace possui vasta aplicação em dispositivos eletromagnéticos onde há interação entre distribuições de corrente elétrica e campos magnéticos.

5 FORÇA DE RELUTÂNCIA

Para o cálculo da força envolvendo elementos condutores, paralelos, percorridos por corrente elétrica é aplicado a expressão para a força de Ampère. Quando a força é resultante da interação entre um campo magnético e cargas em movimento, a força de Lorentz é aplicada. Para condutores percorridos por corrente elétrica e submetidos a um campo magnético a lei de Laplace é utilizada. Porém, para outros casos, que não se apliquem aos citados, uma possível abordagem é calcular a força diferenciando uma expressão de energia potencial (COMPTON, 1986; GOURISHANKAR; KELLY, 1973).

Desta forma, utilizando o princípio da taxa de variação espacial da energia potencial dada por

$$-\frac{dW}{dx}, \quad (25)$$

é possível determinar as forças em sistemas magnéticos.

A força produzida inteiramente por mudanças de energia devido à relutância variável é denominada de força de relutância. Por exemplo, um pedaço de ferro mantido próximo a uma bobina através da qual flui corrente elétrica, experimenta uma força de atração em relação à direção perpendicular da bobina. Considerando ainda que a relutância possa ser determinada em termos da posição do ferro, então, se ao assumir que as linhas de fluxo são paralelas, em princípio a força pode ser determinada em todos os pontos do pedaço de ferro (COMPTON, 1986; CHIKUNI E.; KHAN, 2008).

Embora a força de relutância seja utilizada em máquinas rotativas, sua aplicação é particularmente adequada em dispositivos lineares. Os atuadores de relutância linear são uma tecnologia muito importante por razões econômicas, sua construção é relativamente simples empregando poucos materiais. Conseqüentemente, os atuadores de relutância são simples e acessíveis possibilitando muitas aplicações como, solenóides, sistemas de frenagem ABS, relés e injetores de combustível (COMPTON, 1986; CHIKUNI E.; KHAN, 2008; SCHMIDT, 2011).

É possível derivar expressões para a força de relutância através da conservação de energia, em termos de variáveis de circuito elétrico ou variáveis magnéticas (COMPTON, 1986; CHIKUNI E.; KHAN, 2008; SCHMIDT, 2011),

$$F = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL}{dx} = \frac{1}{2}\phi^2 \frac{\Re}{dx} \quad (26)$$

A força de relutância atua de modo a diminuir a relutância do sistema magnético, ou de forma análoga, aumentar a indutância observada pelo sistema elétrico. Os atuadores lineares de relutância possuem duas categorias principais: os atuadores de movimento axial que variam o comprimento do entreferro, e os atuadores de movimento lateral que variam a área do entreferro. Sendo que existem também atuadores que fazem uso das forças de relutância, axial e lateral.

5.1 Atuador de Movimento Axial

O atuador de movimento axial ilustrado na Figura 8, têm sua expressão da força de relutância derivada do balanço energético do sistema.

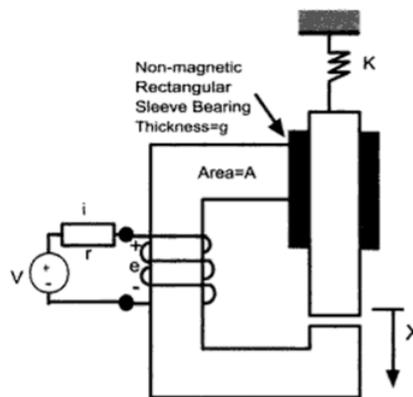


Figura 8: Esquemático do Atuador de Movimento Axial de Relutância Variável.

Fonte: Adaptado de CHIKUNI E.; KHAN, 2008.

De modo a facilitar a obtenção da expressão da energia armazenada no sistema magnético, expressa-se a indutância em termos da relutância,

$$\lambda = Li = N\phi \quad (27)$$

Onde λ é o fluxo concatenado, multiplicando ambos os lados por N ,

$$Ni = \frac{N^2}{L}\phi \quad (28)$$

Considerando a Lei de Hopkinson, onde $F = \phi\mathfrak{R}$, relaciona-se indutância com relutância por

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad (29)$$

Assim, a energia em um campo magnético, expressa em termos das variáveis do circuito, é dada

por

$$W_{campo} = \frac{1}{2} Li^2 \quad (30)$$

Substituindo a definição de indutância, $\lambda = Li$,

$$W_{campo} = \frac{1}{2} \frac{1}{L} \lambda^2 \quad (31)$$

E a relação entre indutância e relutância,

$$W_{campo} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{\mathfrak{R}} i^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2 i^2}{\mathfrak{R}^2} \mathfrak{R} = \frac{1}{2} \mathfrak{R} \phi^2 \quad (32)$$

A força de relutância é deduzida de acordo com a topologia do sistema magnético. Considerando a equação elétrica do sistema,

$$v = iR + e = iR + \frac{d\lambda}{dt} V \quad (33)$$

Logo as potências são,

$$P_{entrada} = vi \quad (34)$$

$$P_{perdas} = i^2 R \quad (35)$$

$$P_{entreferro} = ie \quad (36)$$

Considerando a variação do tamanho do entreferro no tempo,

$$dW_{entreferro} = iedt = i \frac{d\lambda}{dt} = id\lambda = i^2 dL \quad (37)$$

Para um deslocamento positivo, dx , a relutância no entreferro diminui, fazendo com que a indutância vista pela bobina aumente. A corrente constante causa uma fmm constante, logo o fluxo no atuador aumenta. Parte desse aumento de fluxo significa que mais energia está sendo armazenada pelo campo magnético. Como a corrente está sendo mantida constante, a mudança na energia do campo pode ser expressa em termos de variação na indutância (CHIKUNI E.; KHAN, 2008; COMPTON, 1986),

$$dW_{campo} = \frac{1}{2} i^2 dL \quad (38)$$

Comparando as Equações 37 e 38, verifica-se que metade da energia do entreferro é armazenada no campo magnético e a outra metade realiza trabalho mecânico,

$$dW_{dispositivo} = \frac{1}{2}i^2 dL = F dx \quad (39)$$

Reorganizando os termos, tem-se uma expressão para a força em termos das variáveis do circuito,

$$F = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL}{dx} \quad (40)$$

Como a força atua na direção que aumenta a indutância vista pelo circuito elétrico ao substituímos a relação entre indutância e relutância, pode-se expressar a força de relutância em termos de variáveis do sistema magnético (CHIKUNI E.; KHAN, 2008; COMPTON, 1986),

$$F = \frac{1}{2}i^2 \frac{d}{dx} \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = -\frac{1}{2} \frac{N^2 i^2}{\mathfrak{R}^2} \frac{d\mathfrak{R}}{dx} = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathfrak{R}}{dx} \quad (41)$$

Considerando que a força de relutância age de forma a diminuir a relutância do caminho do fluxo, então a expressão da força de relutância para um atuador de movimento axial, em termos das variáveis do circuito, é dado por (CHIKUNI E.; KHAN, 2008; COMPTON, 1986):

$$F = -\frac{1}{2}i^2 \frac{N^2 \mu_0 A}{(x + g)^2} \quad (42)$$

Em um atuador de movimento axial alimentado por uma corrente elétrica constante, produz-se uma força magnetomotriz constante, que através da relutância do sistema limita a quantidade de fluxo no entreferro. Considerando que a força de relutância, conforme Equação 41, que tende a diminuir o entreferro é proporcional ao fluxo ao quadrado, quanto mais a força age diminuindo o tamanho do entreferro, menor é a relutância e conseqüentemente maior o fluxo magnético que atua para diminuir o tamanho do entreferro (CHIKUNI E.; KHAN, 2008; COMPTON, 1986). Este comportamento é denominado de realimentação positiva, e ocorre em atuadores de movimento axial. Sendo muito utilizado em aplicações nas quais a produção da força seja dependente da posição. Em casos onde não se queira esta dependência entre força e posição, faz-se com que o atuador opere na região de saturação magnética do material (CHIKUNI E.; KHAN, 2008; COMPTON, 1986).

5.2 Atuador de Movimento Lateral

Os atuadores de movimento lateral possuem força em mais de uma direção, mas sempre na direção a menor relutância. O atuador ilustrado na Figura 9, quando x é positivo, a força de relutância puxa o elemento móvel para a esquerda, a força procura minimizar a relutância encontrada à medida que o fluxo permeia o rolamento esquerdo. Quando x é negativo, a força de relutância puxa o braço móvel para a direita, a fim de minimizar a relutância do rolamento direito (CHIKUNI E.; KHAN, 2008; COMPTON, 1986).

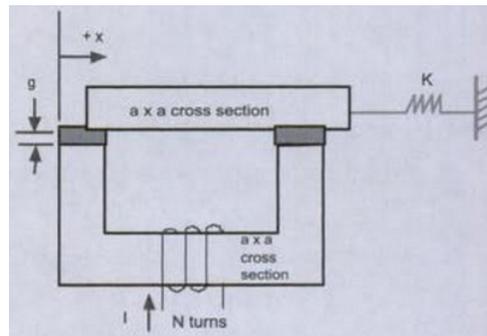


Figura 9: Esquemático do Atuador de Movimento Lateral de Relutância Variável.

Fonte: Adaptado de CHIKUNI E.; KHAN, 2008.

Através da Equação 40 é possível derivar a força de relutância para o atuador de movimento lateral, em termos de variáveis do circuito elétrico, por (CHIKUNI E.; KHAN, 2008; COMPTON, 1986):

$$F = -\frac{1}{2}i^2 \frac{N^2 \mu_0 A^2}{g} \frac{A}{(2A - x)^2} \quad (43)$$

Em geral, os atuadores de movimento lateral são mais adequados para a produção de força independente da posição do que os atuadores de movimento axial (CHIKUNI E.; KHAN, 2008; COMPTON, 1986).

6 CONCLUSÃO

O conceito de força elétrica e magnética obteve diferentes definições desde Newton até Maxwell. O modelo mecanicista proposto por Newton era tido como um modelo físico universal, no qual diversos cientistas formularam expressões para a força eletromagnética. Com a descoberta de Oersted relacionando eletricidade e magnetismo e sua hipótese de haver um magnetismo em torno de um fio condutor de corrente, fez Ampère pensar que a força magnética ocorria através da interação entre elementos percorridos por corrente elétrica, estando este ainda preso ao conceito newtoniano de força, derivou sua expressão para força eletromagnética através de experimentos, não considerando nenhum efeito magnético ou termo correspondente em sua expressão para a força.

Seguindo outra linha de pensamento, Maxwell, adotando o conceito de campo magnético definido por Faraday, formulou uma expressão para a força que alguns anos após foi também formulada por Lorentz, denominada trivialmente de força de Lorentz. A expressão da força de Lorentz considera a força sobre uma carga elétrica em movimento em um campo magnético, sendo corriqueiramente citada em livros didáticos como sendo a força eletromagnética sobre uma carga em movimento, e diferentemente da força de Ampère é largamente utilizada. A força de Lorentz ao ser aplicada para correntes elétricas em um campo magnético recebe o nome de força de Laplace, em homenagem ao físico francês, sendo que esta expressão possui diversas aplicações no equacionamento de dispositivos eletromagnéticos. Diferentemente das demais forças abordadas neste trabalho, a força de relutância é formulada através do equacionamento do balanço energético do dispositivo eletromagnético em questão, sendo que esta força possui uma relação direta com a posição entre partes fixas e móveis do dispositivo, assim como dos materiais utilizados e da geometria do mesmo.

Em virtude do que foi mencionado, esta monografia apresentou de forma sucinta e breve as forças de Ampère e Lorentz, contextualizando com a evolução histórica da física e da relação entre eletricidade e magnetismo. Na abordagem à força de Laplace e de Relutância procurou-se apresentar a origem das suas expressões matemáticas e suas aplicações em dispositivos eletromagnéticos. Possibilitando, assim, elucidar estas quatro forças e suas finalidades, na análise de dispositivos eletromagnéticos.

REFERÊNCIAS

ASSIS, A. K. T.; BUENO, M. **Cálculo de Indutância e de Força em Circuitos Elétricos**. 2.ed. Montreal: Apeiron Montreal, 2015.

ASSIS, A. K. T.; CHAIB, J. P. M. C. **Ampère's Electrodynamics**: analysis of meaning and evolution of ampère's force between current elements, together with a complete translation of his masterpiece: theory of electrodynamic phenomena, uniquely deduced from experience. 1.ed. Montreal: Apeiron Montreal, 2015.

CHIKUNI E., O. O. I.; KHAN, M. T. **Concise Higher Electrical Engineering**. 1.ed. Cape Town: Juta Academic, 2008.

COMPTON, A. J. **Basic Electromagnetism and its Applications**. 1.ed. London: Chapman and Hall, 1986.

CUNHA, J. P. **Electromagnetismo**: magnetostática. universidade de coimbra. disponível em: <<http://fisica.uc.pt/ilabs/eee/eletromagnetismocap2jpc2016.pdf>>. acesso em: junho 2017. 2016.

EDMINISTER, J. A. **Eletromagnetismo**. 1.ed. São Paulo: Mc Graw-Hill, 1980.

GOURISHANKAR, D.; KELLY, D. H. **Electromechanical Energy Conversion**. 2.ed. New York: Thomas Y. Crowell Company Publishers, 1973.

GRANEAU, P. **Ampère-Neumann electrodynamics of metals**. 2.ed. Palm Harbor, FL.: World Scientific, 1994.

GRANEAU, P. G. N. **Newtonian Electrodynamics**. 1.ed. Singapore: World Scientific, 1996.

GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. 3.ed. São Paulo: Pearson Brasil, 2011.

HAYT, W. H. **Eletromagnetismo**. 7.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

MARILIA, A. S. **Estudo de um Atuador Planar**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGEM). Disponível em:

<<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/3592/000390183.pdf>>. Acesso em: Junho 2017.

MARTINS, R. A. **Oersted e a Descoberta do Eletromagnetismo**. Cadernos de História e Filosofia da Ciência (10): 89-114. Disponível em:

<<http://www.ghc.usp.br/server/pdf/ram-30.pdf>>. Acesso em: Junho 2017.

NIST. **The International System of Units (SI)**. Disponível em:

<<http://physics.nist.gov/Pubs/SP330/sp330.pdf>>. Acesso em: abril 2017.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica - Vol. 3 Eletromagnetismo**. 1.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1997.

RIBEIRO, J. E. A. **Sobre a Força de Lorentz, os Conceitos de Campo e a Essência do Eletromagnetismo Classico**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. Instituto de Física, 2008.

SADIKU, M. N. O. **Elementos de eletromagnetismo**. 3.ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

SCHMIDT, R. M. **The Design of High Performance Mechatronics: high-tech functionality by multidisciplinary system integration**. 1.ed. Amsterdam: Delft University Press, 2011.

SIDHARTH, B. G.; MICHELINI, M.; SANTI, L. **Frontiers of Fundamental Physics and Physics Education Research..** Springer. Volume 145.

SILVA, C. C. **Da Força ao Tensor: evolução do conceito físico e da representação matemática do campo eletromagnético**. Tese de Doutorado. Universidade de Campinas (UNICAMP).

Instituto de Física Gleb Wataghin. Disponível em:

<<http://www.ifsc.usp.br/cibelle/arquivos/tese>> Acesso em: Junho 2017.

USTHB. **Licence de Physique S2: electricité - chapter iv: magnétostatique**. université des sciences et de la technologie houari boumedienne - faculté de physique. Disponível em:

<<http://www.usthb.dz/fphy/IMG/pdf/partie3.pdf>>. Acesso em: Junho 2017.